Algebra

Andres Talts; Tallinna Reaalkool, pedagoog-metoodik

Klassikalise algebra põhiülesandeks oli võrrandite lahendamine. Tänapäeval nimetatakse algebraks matemaatika haru, mis uurib peamiselt operatsioone (tehteid) ja nende omadusi. Algebra tähtsust matemaatika osana on võimatu alahinnata ja ka koolimatemaatikas on algebra kindlal ja põhjendatult tähtsal kohal juba esimestest kooliaastatest peale.

Ülevaate põhikooli algebraõpetusest andis Andres Haavasalu oma artiklis, mille leiate

http://www.oppekava.ee/index.php/P%C3%B5hikooli_valdkonnaraamat_MATEMAATIKA.

Uue õppekava rakendamine on alanud. Matemaatika õpetamist ja õppimist gümnaasiumis ootavad ees üsna suured muutused. Korduvalt on rõhutatud, et matemaatika kui õppeaine on paljudele õpilastele raske ja nii matematemaatika õpetamine kui ka õppimine peab muutuma elulähedasemaks. Õppekavast leiab selleks hulgaliselt võimalusi – probleemülesannete lahendamine, õuesõpe, praktilised tööd, uurimistööd jms. Eesmärk on panna õpilasi mõtlema, õpetada neid leidma seoseid matemaatikatunnis õpitu ja eluliste situatsioonide vahel, arendada neis loovust ning oskust ja julgust avaldada oma arvamust, vaielda ja argumenteerida.

Paljud õpetajad on arvamusel, et sellised praktikad rakenduvad väga-väga visalt. Põhiliseks mureks on ajapuudus. Vaatamata sellele, et matemaatika ainekava läbis üsna tõsise kärpimiskuuri, on see endiselt piisavalt mahukas. Õpetajad leiavad, et ainus võimalus ajapuudusest pääsemiseks on tundide arvu suurendamine. Tegelikult ei pruugi see nii olla. Õpetajatel ei tohiks olla eesmärgiks n-ö õpiku kaanest kaaneni läbiõpetamine, vaid õpetada tuleks matemaatikat kui toredat ja huvitavat õppeainet. See kõik nõuab õpetajalt palju leidlikkust, aga põhiliselt siiski tahtmist teha midagi teistmoodi. Vajadusel tuleks ilma igasuguse südamevaluta loobuda mõnest tehniliselt keerulisest ja aeganõudvast teemast. Algebra annab selleks päris mitmeid võimalusi. Kõige olulisem on aga see, et õpetaja ise oma ainet hästi ja põhjalikult valdaks ning armastaks, siis hakkavad seda tegema ka tema õpilased.

Käesoleva artikli eesmärk on anda uue õppekava valguses ülevaade gümnaasiumi algebraõpetusest ning jagada mõtteid ja soovitusi. Seda kõike paralleelselt kahes erinevas õppeaines – kitsas ja laias matemaatikakursuses.

Midagi ei ole muutunud – kas poleks juba aeg?

Algebras on väga palju selliseid teemasid ja ülesandeid, mis nõuavad väga konkreetsete valemite, reeglite omandamist ja kasutamist, vahel lausa päheõppimist (nt algebra põhivalemid, ruutvõrrandi lahendivalem jne). Siin on aga väga suur oht – reeglite, valemite jm teadmine on väga oluline, aga olulisem on sisuline arusaamine. Juba rohkem kui 15 aastat tagasi tegid TÜ õppejõud Tiiu Kaljas ja üliõpilane Riina Blumberg 9. ja 12. klassides algebra testi, mis koosnes praktiliselt peast lahendatavatest (vastava kooliastme) algebra ülesannetest (protsendid, tehted ratsionaalarvudega, funktsioonid, üks- ja hulkliikmed, võrrandid, astmed-juured, jada, võrratused). Tulemused olid uskumatult halvad. Vaatame neid pisut täpsemalt, sest kahjuks peab tõdema, et olukord ei ole sugugi muutunud ja probleemid on praegu täpselt samad.

Põhikooli õpilased lahendasid kõige halvemini võrratusi (õigesti lahendas ca 20% ja üldse ei lahendanud ca 44%) ning ülesandeid astmete ja juurtega (õigesti või põhimõtteliselt õigesti lahendas ca 35% ja üldse ei lahendanud ca 40%). Ülesanded olid tõesti lihtsad, näiteks:

1. *Lahenda võrratus*

1) $\frac{1}{x} > 0$

2) $-3x < 6$

3) $x^2 > 3x$

2. *Arvuta*

1) $\left(\sqrt{3}\right)^3$

2) $0{,}008^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{0,5}$

Midagi rõõmustavat ei ole ka võrrandite lahendamisoskusega – ca 40% oskab võrrandeid lahendada, aga ca neljandik ehk 24,5% ei oska üldse võrrandeid lahendada. Näiteks üks ülesanne nõudis kahe võrrandi hulgast (ruut- ja lineaarvõrrand) lineaarvõrrandi leidmist ja selle lahendamist. Vaid 50% õpilastest said sellega ka hakkama.

Sugugi parem pole olukord 12. klassi õpilaste tulemustega. Õigesti või peaaegu õigesti lahendanud õpilaste protsendid on küll teemade lõikes oluliselt kõrgemad kui põhikooli õpilastel, aga mõnede teemade juures (nt jadad, võrratused, tehted üks- ja hulkliikmetega) on täiesti põhjendamatu, et ca 13-20% õpilastest neid ülesandeid ei lahendagi. Mõned näited:

1. *Lihtsusta avaldis*

$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-a)^2}$ Ülesande oskas õigesti lahendada 70% õpilastest.

2. *Lahenda võrratus*

$-x^2 > 3x$ Kolmandik õpilastest seda ülesannet lahendada ei osanud.

3. *Leia funktsiooni määramispiirkond*

(a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ *(b)* $y = \frac{1}{1-x^2}$

Mõlema ülesande lahendatuse protsent oli 50%.

Näidete rida võiks jätkata eksponent- ja logaritmfunktsioonide määramispiirkonna leidmise ülesannetega. Ka seal oli tulemus vaid 50%. Võiksime siia ritta lisada veel probleemid juurvõrrandite, mittetäielike ruutvõrrandite ja kõige lihtsamate logaritm- ja eksponentvõrrandite lahendamisega.

Kindlasti tundis nii mõnigi õpetaja neid eelnevaid ridu lugedes „äratundmisrõõmu". Õpetajad peavad ükskord hakkama neid probleeme märkama ning tegelema just nende pealtnäha lihtsate ja väikeste probleemide kõrvaldamisega. Kui me seda ei tee, siis need väikesed probleemid vaid kuhjuvad ja tõeliselt häid tulemusi (sh PISA 5. ja 6. tase) lihtsalt ei tule.

Algebra matemaatika kitsas ja laias kursuses ning erinevused käsitluses

Uus õppekava lubab gümnaasiumiõpilasel valida, millisel tasemel ta järgneva 3 aasta jooksul matemaatikat soovib õppida. Samuti võib õpilane, vastavalt kooli õppekavas kehtestatud korrale, oma valikut muuta. See kõik aga tähendab seda, et õpetajad peavad oma õpetamises olema veelgi paindlikumad kui praegu ja leidma iga kursuse teemade juures just selle kõige olulisema (vundamendi) ning vastavalt võimalustele (nt ajaressurss, tehnilised vahendid jm) otsustama, kas ja kui sügavuti iga teemat edasi arendada.

Vaatame, kuidas ja millistes kursustes on algebra teemad kajastatud ning kuidas neid kitsas ja laias matemaatika kursuses võiks käsitleda.

Kitsas kursus (edaspidi KK)	Lai kursus (edaspidi LK)
I Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused	I Avaldised ja arvuhulgad II Võrrandid ja võrrandisüsteemid III algus Võrratused

KK

Juba esimese jaotuse puhul on selgelt näha, kui erinev on käsitluse sügavus kisas ja laias matemaatikakursuses. Vaatame seda pisut täpsemalt.

I kursuse (35 tundi) lõpuks KK õpilane:

1) eristab ratsionaal-, irratsionaal- ja reaalarve;

Käsitlus tugineb erinevatesse arvuhulkadesse kuuluvate arvude loetlemise ja/või kirjeldamise abil, kasutatakse illustreerivaid jooniseid (nt kus mingi arv arvteljel asub, joonised arvuhulkade omavaheliste seoste kohta), arvu absoluutväärtus defineeritakse kui selle kaugus arvtelje nullpunktist. Õpilane peaks olema suuteline andma vastuse küsimustele:

Milline lause on tõene, milline väär?

Iga naturaalarv on täisarv ……. $N \notin Q$ …….

Mõni ratsionaalarv on täisarv …….. $Z \in R$ ……..

Kirjuta lünka kas $\in$ või $\notin$

3 …. N $\sqrt{5}$ … Q -7 … R

$2\frac{1}{3}...Z$ 1,6 ….. Q (1 – 3,5) : 0,5 …. I

Vasta küsimustele.

1. Milliste naturaalarvude kaugus nullpunktist on väiksem kui 5?
2. Milliste täisarvude kaugus nullpunktist on väiksem kui 3?

3. Kumb on suurem, kas -8 ja 13 vahe absoluutväärtus või nende arvude absoluutväärtuste vahe?

2) teisendab lihtsamaid ratsionaal- ja juuravaldisi;

Tuleb arvestada, et põhikoolis on algebraliste avaldistega seotud temaatika oluliselt lihtsustunud. See aga tähendab, et nüüd tuleb seda teemat üsna põhjalikult käsitleda. Avaldiste lihtsustamis- ja teisendusoskus on küll aluseks järgnevate kursuste õppimisel ja teadmiste omandamisel, aga ilmselt on siis nüüd koht, kus võiks loobuda tehniliselt keerukate ja palju lahendamisaega nõudvate algebraliste avaldiste lihtsustamisest.

Juuravaldiste lihtsustamine peaks jääma väga elementaarsele tasemele (nt juurte teisendamine murrulisele astendajale, astme omaduste rakendamine ja vastuse kirjutamine juurena. Tähelepanu tasub pöörata arvu esitamisele standardkujul ja/või kümne astmete abil ning tehetele selliste arvudega, sest see toetab nii füüsikat kui ka keemiat. Avaldiste lihtsustamisel piirduda valemi $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ kasutamist nõudvate lihtsustustega. Oluline on osata avaldist tagurdada, sest võrrandi lahendamisel järgmistes kursustes on sellega põhi olemas. Seega peaks kitsa kursuse lõppedes olema järgnevad oskused:

Kirjuta murrulise astendaja abil $\sqrt[3]{5}=\cdots$ $\quad x\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}=\cdots$

Kirjuta juuremärgi abil $16^{\frac{1}{4}}=\cdots$ $\quad 3^{2,5}=\cdots$

Arvuta $\left(\sqrt{3}+\sqrt{9}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{9}\right)=...$ $\quad 27^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{2}}-\left(7^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{4}}-2^0=...$ $\quad \frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{3}}=\ldots$

Esita arv standardkujul: 0,0000000165 = …; 74,243 = …; - 0,002574 = … .

Ruudukujulise maatüki pindala on 1428 m^2. Kui suur on selle maatüki ümbermõõt, vastus esita 0,5 m täpsusega.

Esita arvu 10 astmete abil: 10 km = ….. mm $\quad$ 4,5 cm^3 = ….. m^3 $\quad$ 0,005 mm^2 = …. m^2

Arvuta taskuarvutiga : $12\frac{1}{6}-\left[2^{-2}-1{,}265:1\frac{1}{3}+1{,}15\cdot10^{-5}\cdot0{,}013\cdot10^3\right]:\sqrt{3^{-1}}$

Lihtsusta avaldised: $\frac{5x^2-12x+4}{6-15x}$; $\left(\frac{a+1}{a^2-3a-4}-\frac{a}{12-3a}\right)\cdot\left(a-\frac{4a-4}{a-1}\right)$

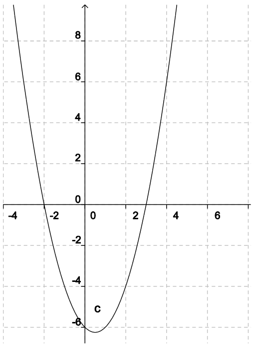
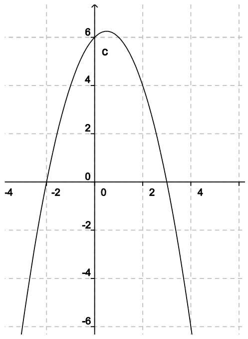
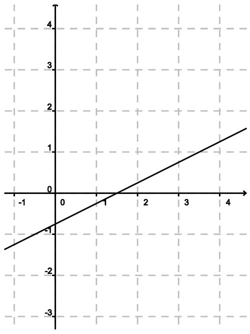
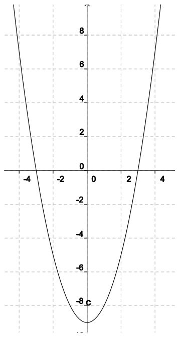
3) eristab võrdust, samasust, võrrandit, võrratust. Lahendab ühe tundmatuga lineaar-, ruut- ja lihtsamaid murdvõrrandeid , lineaar- ja ruutvõrratusi ja ühe tundmatuga lineaarvõrratustesüsteeme.

Loetletud mõisteid ei pea õpilane oskama defineerida, aga ta peab oskama neid ära tunda ja kasutada. Kui lineaar- ja ruutvõrrandite lahendamise oskus on põhikoolis omandatud, siis murdvõrrandite lahendamisega põhikoolis enam ei tegeleta. Ei tasu unustada, et seetõttu tuleb alustada lihtsamatest murdvõrranditest. Kogu KKs peab olema rõhuasetus reaalsete kontekstidega ülesannetel ja ka õpetaja peab pöörama eriti palju tähelepanu elulistele ülesannetele, st: protsentülesannete lahendamine; üleanded, mis lahenduvad lihtsamate võrrandite koostamise ja lahendamise abil (lineaar-, ruut- murdvõrrand või lineaarvõrrandite süsteem); liikumis- ja koostööülesanded. Ka siin on võimalus õpetajatel aega kokku hoida, sest murdvõrrandite keerukus peaks piirduma siiski tekstülesannete lahendamisel tekkivate murdvõrranditega. Rõhuasetus peaks kindlasti olema võrrandi omaduste õigel kasutamisel – millal teisendatud võrrand jääb samaväärseks ja millal mitte. Millal peab lahendeid kontrollima ja millal mitte.

1. Konverentsil osaleb 180 külalist, kellest $\frac{1}{3}$ joob vett, 25% teed ja ülejäänud kohvi. Mitu inimest joob kohvi? Mitu liitrit iga jooki on vaja, kui ühe külalise kohta arvestatakse 250 ml?
2. Linnast A linna B on 100 km. Kaks autot alustasid linnast A üheaegselt sõitu linna B. Kuna ühe auto kiirus oli 10km/h võrra suurem, siis jõudis ta linna B pool tundi varem. Leia mõlema auto kiirus.

Lineaarvõrratuste käsitlus on samuti põhikooli ainekavast välja jäetud ja esimene kokkupuude võiks võrratustega olla just arvuhulkade märkimine arvteljele. Sealt edasi liigutakse samm-sammult lineaarvõrratuselt ruutvõrratuse ja ühe muutujaga lineaarvõrratustesüsteemi lahendamise juurde. Väga oluline on, et õpilased omandaksid võrratuste lahendihulga märkimise oskuse arvteljele. Kindlasti on soovitatav lahendada võrratusi graafiliselt st lineaarfunktsiooni ja ruutfunktsioonide graafikute abil. Ruutvõrratuse korral juhtida tähelepanu ka sellele, et ruutvõrratuse esitusel tegurdatud kujul saab vaadelda korrutist ja uurida, millal on kahe arvu korrutis negatiivne või positiivne. Soovitan valida kindlasti ka võrratusi, mille korral on lahendihulk tühihulk või kogu reaalarvude hulk Kindlasti saab siin kasutada ka arvutiprogramme nt Wiris, GeoGebra jt, mis on abiks funktsioonide graafikute joonestamisel (sirged, paraboolid, joonte lõikepunktid), kuid nende programmide kasutamine peaks olema vaid abivahend teema paremaks mõistmiseks. Samas aitab mistahes pilt edaspidi funktsioonide korral seostada mõisteid nagu nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond ning toetab arusaamist võrratusest, kus otsitakse, milliste tundmatute korral on avaldis positiivne, negatiivne, mittepositiivne või mittenegatiivne.

1. Lahenda võrratus ja märgi lahendihulk arvteljele:
   $1-7x \le 5-x$ $\qquad\qquad$ $(x-2)(3-x)<0$
2. Milline joonistest illustreerib võrratust $x^2 - x < 6$. Selgita joonise valikut ja märgi võrratuse lahendihulk joonisele.

a)  b)  c)  d) 

3. Leidke võrratustesüsteemi täisarvulised lahendid $\begin{cases} x+4 \geq 2x \\ 1-2x < -x+2 \end{cases}$

4. Talupidaja pakendas kartuleid kottidesse, mille kandevõime on 3,5 kg. Kui ühe kartuli keskmine kaal on 165 grammi, siis maksimaalselt mitu kartulit on võimalik sellesse kotti panna, kui kott mahutab 5 liitrit ja ühes liitris on keskmiselt 8 kartulit.

LK

õpilasel on eespool nimetatud teemade omandamiseks peaaegu 2,5 kursust (s.o ca 80-90 tundi).

Eelnevalt nimetatud teemade käsitlus on oluliselt sügavam ja põhjalikum. Oluline on selgitusoskus ja teema sisuline mõistmine.

I kursus – *algebraliste st nii ratsionaal- kui ka irratsionaalavaldiste lihtsustamisel kasutatakse kuupide summa ja vahe ning summa ja vahe kuupide valemeid, absoluutväärtuse käsitlemisel nii algebraline kui geomeetriline interpretatsioon, arvusüsteemid kahendsüsteemi näitel, arvu –es juur, astme mõiste üldistamine, tehted astmete ja juurtega, olulisel kohal on rakendusliku sisuga ülesanded (protsentülesanded) jne.*

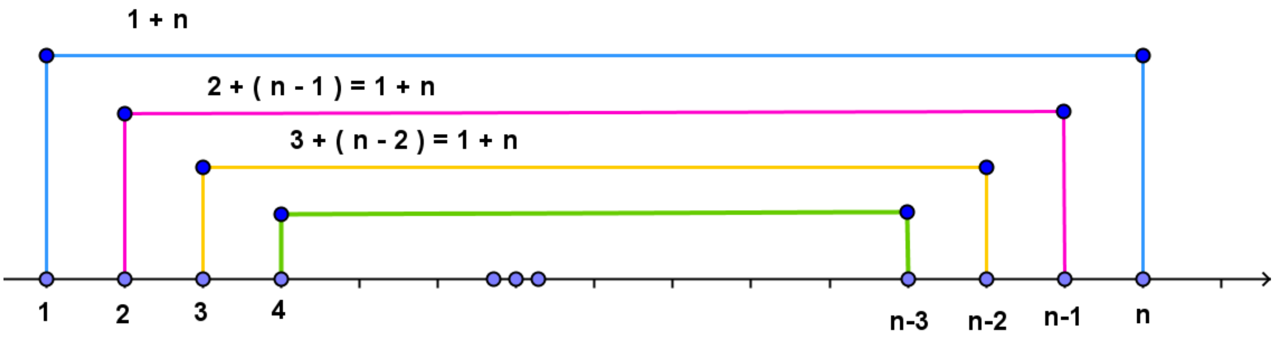
Seega kogu kursuse eesmärk on korrata ja teadvustada arvude maailma, arvutamise maailma põhimõisted ning laiendada seda ratsionaal- ja irratsionaalavaldistele.

Kõige selle saavutamiseks on soovitus alustada arvuhulkadest $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: vaadelda võiks hulkade omadusi aritmeetiliste tehete suhtes.

Naturaalarvude hulga juures võiks peatuda arvuhulga järgnevuse omadusel ning tuua sisse tõestusmeetodina täielik matemaatiline induksioon. See annab võimaluse tõestada erinevaid teoreeme, mis on seotud naturaalarvude hulgaga. Aga samuti oskuse püstitada hüpoteesi ja seejärel see tõestada.

Näiteks: *leidke eeskiri esimese n naturaalarvu summa S_n leidmiseks.*

Hüpoteesi püstitamine: (vt http://mathandmultimedia.com/2010/09/15/sum-first-n-positive-integers/)



$S_n = \frac{n}{2} \cdot (1+n)$ ja edasi juba tõestus, kasutades täielikku matemaatilist induktsiooni.

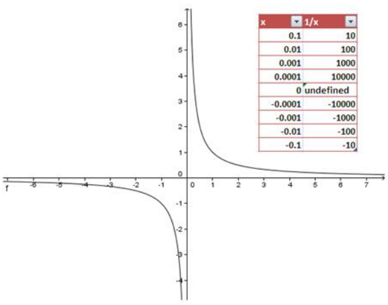
(vt http://mathandmultimedia.com/2010/09/27/mathematical-induction/)

Edasi annab matemaatiline induksioon võimaluse tõestada erinevaid jaguvuse probleeme.

- *Tõestada, kui paaritu arvu ruutu ühe võrra vähendada, siis tulemus jagub alati arvuga 8.*
- *Tõestada, et esimese n naturaalarvu korral kehtib*
  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- *Tõestada,et mistahes naturaalarvu n korral:*
  $4^n + 15n - 1$ *jagub ilma jäägita arvuga 9;*
  $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ *jagub ilma jäägita arvuga 24;*
- *Tõestada, et kumera n- nurga diagonaalide arv väljendub valemiga* $\frac{n(n-3)}{2}$

Täisarvude korral peaks märkima arvu vastandarvu mõistet, et oleks üheselt arusaadav, miks ikka $-(-45) = 45$ või $-(+9) = -9$, st arvu *a* vastandarv on arv –*a* ja esimene avaldis kirjeldab arvu – 45, mille vastandarv on arv 45.

Märkida võiks ka arvuga null jagamist kui sellist, mida ei ole võimalik sooritada:



Võib ka näidata kui $6 : 3 = 2$, sest $2 \cdot 3 = 6$. Analoogselt saame $6 : 0 = x$, siis $6 = x \cdot 0 = 0$. Oleme saanud et arv 6 on võrdne arvuga 0, mis aga ei ole võimalik.

Allikas: http://mathandmultimedia.com/wp-content/uploads/2010/04/div0-2.png

Ratsionaalarvude hulga korral võiks uurida probleemi, miks ratsionaalarvude hulk on tihe. Tuua eraldi välja teoreem „Iga kahe ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarve."

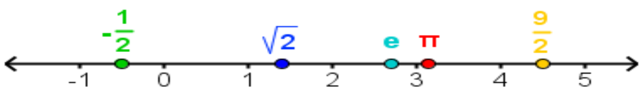
Samuti väärib käsitlemist see, et iga ratsionaalarv avaldub lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja vastupidi – iga lõpmatu perioodiline kümnendmurd on võimalik esitada hariliku murruna:

12,2 = 12,200000… = 12,2(0);

1,1(31) = x, siis 1000x = 1131,313131…. ja 10x = 11,313131… ning seega

1000x – 10x = 1120 , $x = \frac{1120}{990} = \frac{112}{99}$

Irratsionaalarvude hulga korral peaks üritama vaadelda probleemi, et igale ratsionaalarvule vastab arvteljel parajasti üks punkt ja – kas siis igale arvtelje punktile vastab ka ratsionaalarv? Selleks võiks tõestada teoreemi „ **Arv** $\sqrt{2}$ on mitteratsionaalarv".



Allikas: http://mathandmultimedia.com/wp-content/uploads/2010/05/rational-irrational3.png

Peaks tutvustama kindlasti ka **arvu** $\boldsymbol{\pi}$. Väga hästi sobib siia Helki Haavasalu koostatud esitlus „Arvu π imeline lugu“,

http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=201:arvu-pii-imeline-elulugu&catid=95:ringjoone-pikkus-ja-ringi-pindala&Itemid=121

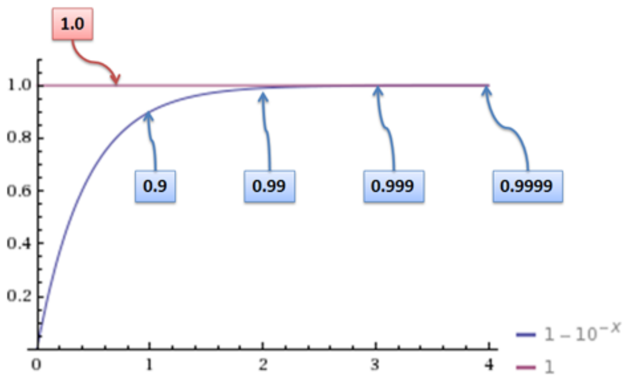
Sama väärib ka **kuldlõige**, mis on ühe lõigu kaheks jaotamine viisil, et kogu lõigu pikkuse ja pikema osa suhe on võrdne pikema ja lühema osa suhtega.

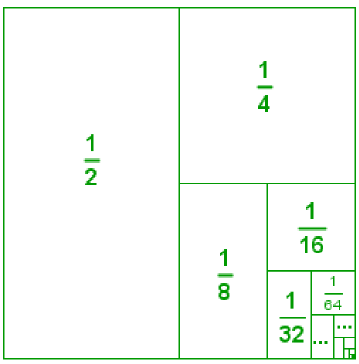
Tähistatakse $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ≈1.618033988749894848204586834365638117720309180… Videod seletavad enam kui mistahes muu õppevahend. Siinkohal tasub rääkida ka Fibonaci arvudest.

http://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA&feature=player_embedded

http://www.youtube.com/watch?v=3sERcM9o25g&feature=player_detailpage

Reaalarvude hulk on pidev arvuhulk. Siinkohal mõned mõtted:





$1 = \frac{1}{11} + \frac{10}{11} = 0{,}090909\ldots + 0{,}909090\ldots = 0{,}999999\ldots$ või

0,99999999... = x   10x = 9,99999…

– x = 0,99999…

9x = 9, x = 1   x = 0,9999… = 1

Allikas: http://mathandmultimedia.com/mathematics/

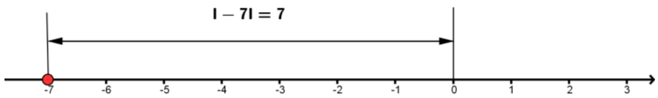
Reaalarvude piirkonnad – hädavajalik edaspidiseks tekstist arusaamisel ja ühesuguse märgistuse kasutamisel. Mõisted: lõik, (lõpmatu) poollõik, (lõpmatu) vahemik. Hulkade ühend, ühisosa ja vahe. Tähelepanu võiks juhtida järgnevale:

a) Kui $A = \{x | -3 \le x < 4 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$, siis milline lause on tõene: $-3 \in A$; $4 \in A$; $1{,}3 \notin A$;
b) $x \in \mathbb{R}$ on samaväärne $x \in (-\infty; \infty) =]-\infty; \infty[$;

c) $B =]-3; 4] = (-3; 4];$
d) $t \in (-\infty; 3) \cup [4; \infty) = \mathbb{R} \setminus [3; 4)$

Reaalarvu absoluutväärtuse puhul on oluline kõigi püstitatud probleemide lahendamisel lähtuda alati definitsioonist ja graafilisest tõlgendusest.

a) $|-7| \overset{\text{def}}{=} -(-7) = 7$ ehk

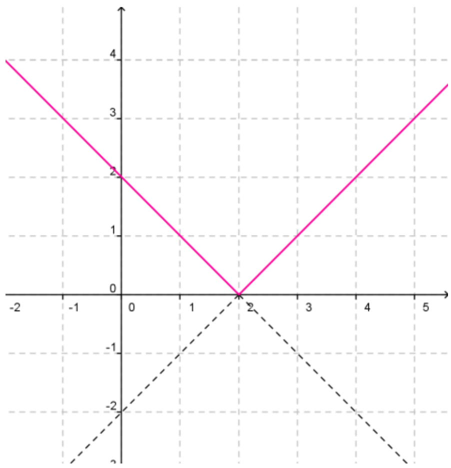


b) $|x-2| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -(x-2), & x-2<0 \\ x-2, & x-2 \geq 0 \end{cases}$ või

$x - 2 = 0$, siis $x = 2$ ning $x > 2$ korral on avaldis $x - 2$ positiivne ja $x < 2$ korral on avaldis $x - 2$ negatiivne, st aga negatiivse arvu absoluutväärtus on positiivne arv, st kaugust arvtelje nullpunktist, siis sel korral $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

Kõige raskemaks kohaks ongi arusaamine, et kui absoluutväärtuse märgi vahel olev avaldis on negatiivne, siis tema kaugus peab olema positiivne arv.

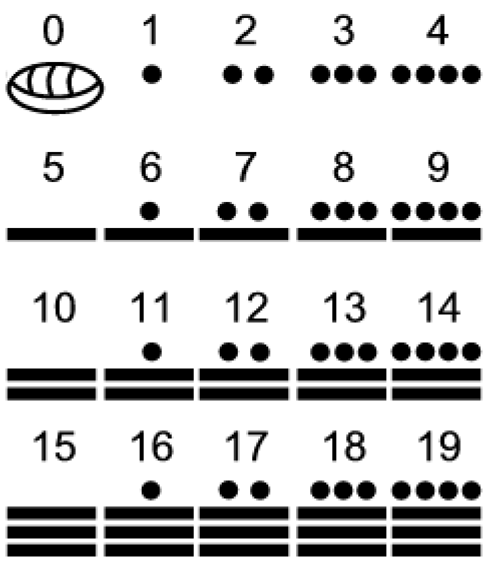
c) kas leidub arv, mille korral $|x-2| = -1$?
d) joonistage funktsiooni y = $|x-2|$ graafik;
Tegelikkuses on ju see ülesanne lahendatud, aga uus situatsioon – enne ei ole nähtud!
Mida teha? Tabel on üks võimalustest. Eespool aga juba oli see avaldis , st me saame ka funktsiooni kirjutada ilma absoluutväärtuse märgita: $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x-2<0 \\ x-2, & x-2 \geq 0 \end{cases}$ see aga tähendab, et antud funktsioon $x = 2$ korral muutub ja graafik koosneb kahest erinevast sirgest.

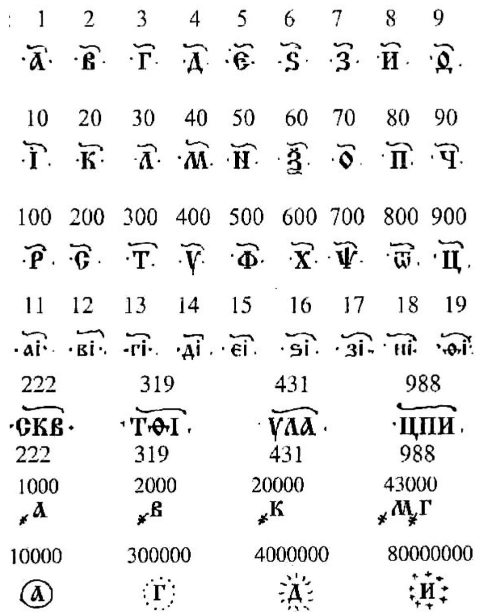


e) joonistage funktsiooni $y = \frac{|x|}{x}$ graafik;
f) lihtsustage avaldised: $|12-x|$, kui $11 < x < 21$; $|x-1| + |3-x|$; $|x^2 - 3x + 2|$; $x^2 - |3x| + 2$; $\big||x-3| - |x| - |x-1|\big|$, kui $x \leq -1$ jne;
g) joonistage funktsioonide graafikud: $y = |x+1| - |x-1|$; $y = |x^2 - 4|$; jne.

Arvusüsteemide vaatlemise alustuseks sobib ajalooline ülevaade erinevate rahvaste poolt kasutatud arvumärkidest ja nende süsteemide ülesehitusest; positsiooniline- ja mittepositsiooniline arvusüsteem.

Soovitan vaadata veebist: http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/index.htm. Sealt on võimalik leida väga häid interaktiivseid viiteid Araabia, Babüloonia, Hiina, India, Egiptuse, Kreeka ja Maiade poolt kasutatud arvusüsteemidele. Mõned näited ka siinkohal.





http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1b/Maya.svg/220px-Maya.svg.png

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/24/Kirilica-cifri.jpg/300px-Kirilica-cifri.jpg

Kahendsüsteem ja selle seotus tänase päevaga on nii tihe, sest pea-aegu kõik kasutavad arvuteid, mille tööpõhimõtted on seotud just selle süsteemiga. Tegelikult on minu jaoks olulisim see, et õpilased mõistaksid, et mistahes arvusüsteemi (n) korral $n_{10} = 10_n$. Kahendsüsteemi puhul seega $2_{10} = 10_2$ ja edasi $4_{10} = 2^2 = 10_2^2 = 100_2$ …, siit peaks jõudma selleni, kuidas on kahendsüsteemist võimalik kiiresti üle minna 4-nd, 8-nd ja 16-nd süsteemi, ja vastupidi. Liitmine, lahutamine ja korrutamine ei tundu esialgu keerulised, kuid soovitan jõuda korrutamisel arvudeni, kus mõlemad arvud on suuremad kui kahekohalised ja sellised, kus on vaja tulemuse saamiseks liita 1+1+1=100 ning järelikult tuleb järgmisele järgule lisada juurde 10, vt näidet. Soovitan kindlasti vaadelda ka teisi arvusüsteeme: kümnendsüsteemi arvu teisendamine mistahes arvusüsteemi ja vastupidi. Vaadelda ka tehteid mistahes arvusüsteemides. Väga hea peast arvutamise kinnistamiseks ja hea loogika(mõtte)harjutus.

$Näide$ 1.

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ \cdot 1111_2 \\ \hline 11011 \\ 11011 \\ + \quad 11011 \\ 11011 \\ \hline 110010101_2 \end{array}$$

$Näide$ 2. $ABC_{16} + A97_{16}$

Tähtis on ainult see, et igaüks leiaks õie tee: minna üle kümnendsüsteemile ja sooritada tehe selles süsteemis; minna üle kahendsüsteemi ja sooritada tehe selles, sest 1 ja 0 on lihtne liita; sooritada tehe 16-nd süsteemis.

Kindlasti on sobiv ka kümnendale klassile soovitada arvutimängu: Cisco Binary Game, mille leiab lehelt: http://forums.cisco.com/CertCom/game/binary_game_page.htm.

Astme mõiste üldistamine. Põhikoolis õpitu kordamiseks on kasulik näidata kõiki õpitud valemite kehtivust naturaalarvulise astendaja korral ja põhjendada ka, kui astendaja on täisarv; ning ikka tasub välja tuua, et 0^0 ei defineerita. Olulisem on jõudmine arusaamisele, et $a^{\frac{m}{n}} =$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, kus\ a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Viimasele aitab kindlasti kaasa aritmeetilise juurte omaduste kehtivuse näitamine. Samas on alati kujunenud õpilaste jaoks kõige suuremaks raskuseks $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$, sest paljude jaoks on raskuseks aritmeetilisel ja algebralisel juurel vahet teha. Ülesannete lahendamisel aga ei saa ega tohi suruda peale, kuidas peaks mingit tüüpi ülesandeid lahendama. Pigem peaks andma võimaluse igal õpilasel jõuda selgusele, kas lahendada juurtega või asendada juured murrulise astendajaga. Sama kehtib ka selle kohta, kas astme alus esitada algtegurite korrutisena või lihtsalt korrutisena. Irratsionaalsuse kaotamisel on kahepidine mõte – kas seda teha või mitte, sest füüsika ei vaja täpseid tulemusi…

Näiteks mõningaid ülesandeid, mida on kasulik lahendada:

$$a)\ \frac{2^{21} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}\ ;\ b)\ 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-2} \cdot \left(\sqrt[3]{16}\right)^{-\frac{1}{2}};\ \ c)\ \sqrt[4]{\frac{5^{20}}{9^8}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3^6}{25^{4,5}}} \cdot \frac{81}{25};\ d) \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$$

$$e) \sqrt[4]{19-\sqrt{105}} \cdot \sqrt[4]{19+\sqrt{105}};\ f) \sqrt[6]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[5]{x}}};\ g)\ \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}}}{\sqrt{40}} : \frac{3\sqrt{2,5}}{\sqrt{3\sqrt[3]{40}}};$$

$$h) \sqrt{11-4\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}};\ i)\ \text{Kumb juurtest on suurem, kas } 3 \cdot \sqrt[4]{2} \text{ voi } 2 \cdot \sqrt[4]{3};\ \text{jne ...}$$

Samuti ei tohiks unustada irratsionaalsuse kaotamist nimetajast ja(või) lugejast, sest see on eeltöö avaldiste lihtsustamisele. Irratsionaalsuse kaotamiseks tuleb kasutada murru põhiomadust: murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Nimetajasse peab tekkima olukord: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, n = 2k+1 \\ |a|, n = 2k \end{cases}$ $või\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ...

Näiteks: $\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\frac{2}{\sqrt{6}+2}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ ja seejärel $\frac{6}{3\sqrt{2}-4} - \frac{14}{2\sqrt{2}-1} - \frac{10}{\sqrt{2}}$ ning $\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

Oluline on kindlasti peatuda ka tehetel arvu kümne astmetega ja arvu viimisel standardkujule, see toetab füüsikat ja keemiat.

Ratsionaalsete- ja irratsionaalsete algebraliste avaldiste lihtsustamine.

Esimene probleem: kas peaks ratsionaalsete algebraliste avaldiste lihtsustamist vaatlema enne astme mõiste üldistamist ja alles seejärel vaatlema tehteid juurtega ning siis irratsionaalsete algebraliste avaldiste lihtsustamist? Jätan selle probleemi nn õhku rippuma ja iga õpetaja peaks oma parema äranägemise järgi toimima.

Teine probleem: algebralise murru määramispiirkond. Arvan, et piisab, kui pidada silmas, et kõikide tehete sooritamisel arvestame muutujate lubatud väärtuste piirkondadega ning kokkuleppeliselt võime need kirjutamata jätta.

Kuna eelnevas kooliastmes on õpitud tehted üks- ja hulkliikmetega ning algebraliste murdudega, siis alustama peabki sellest. Erilise tähelepanu peaks saama tegurdamine: sulgude ette toomine; algebra korrutamisvalemite kasutamine; ruutkolmliikme tegurdamine; rühmitamine.

Tegurdamisel ikka lihtsamalt keerulisemale. Taanda murd:

$$a)\ \frac{7x^2-35x^2y}{70xy-14x};\ b)\ \frac{5x^2+10xy+5y^2}{15y^2-15x^2};\ c)\ \frac{3x-5y-6xy+10y^2}{3x-5y+6xy-10y^2};\ d)\frac{6x^2-17x+5}{4x-1-3x^2};$$

$$e)\ \frac{3x^3+3y^3}{6x^2-6xy+6y^2};\ f)\ \frac{x-y}{x+y};\ g)\ \frac{\sqrt[4]{x}+7}{\sqrt{x}-49};\ h)\ \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}};\ i)\ \frac{x+4\sqrt{x}-12}{x-36};\ldots$$

Eelnevat arvestades võiks olla kursuse hästi läbinule jõukohased näiteks järgmiste algebraliste avaldiste lihtsustamine:

$$a)\ \left(\frac{9a+18}{a^3+8}-\frac{a+4}{a^2-2a+4}\right)\cdot\frac{6a-3a^2-12}{5-a};\ b)\ \left(\frac{2y+1}{x-3}-\frac{42-2y}{2xy-7x-6y+21}\right):\frac{2y+7}{6x-9-x^2}$$

$$c)\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right);d)\ \frac{x+6\sqrt{x}+9}{7\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{7\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{42\sqrt{x}}{9-x}\right);$$

$$d)\left(\frac{2x+x^{0,5}y^{0,5}}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right);e)\ \frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}\ \text{jne}$$

II kursus – *LK õpilane peab nimetatud kursuse lõpuks oskama lahendada lineaar-, ruut-, murd- ja juurvõrrandeid, samuti ühte absoluutväärtust sisaldavat võrrandit, võrrandisüsteeme, kus vähemalt üks võrranditest on lineaarvõrrand ning kahe- ja kolmerealist determinanti. Väga oluline on igasuguste (sh rakendusliku sisuga) tekstülesannete lahendamise oskus.*

Kursuse lõppedes peaksid olema omandatud tehnilised võtted võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamiseks. Antud kursus toetab kõiki teisi kursusi.

Mõisted: avaldis; avaldise määramispiirkond; võrdus; samasus; võrrand; võrrandi määramispiirkond; võrrandi lahend.

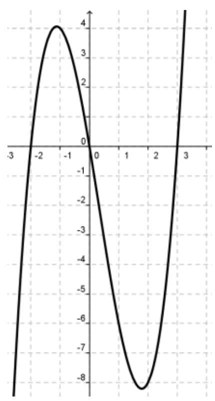
Avaldise määramispiirkonnaks nimetatakse muutujate väärtuste hulka, mille korral avaldisel leidub väärtus. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ kaks avaldist, millede määramispiirkonnad on D_f ja D_g.

Kirjutis $f(x)=g(x)$ on **võrdus**, kui anda kõigile muutujatele konkreetseid väärtusi avaldiste ühisest määramispiirkonnast, siis saame **arvvõrduse**, mis võib olla nii tõene kui ka väär.

Kirjutis $f(x)=g(x)$ on **samasus**, kui võrdus on tõene kõigi muutujate väärtuste korral avaliste ühisest määramispiirkonnast.

Muutujat sisaldavat võrdust $f(x)=g(x)$, mis ei osutu samasuseks, nimetatakse **võrrandiks** ja avaldiste ühist määramispiirkonda **võrrandi määramispiirkonnaks**. Muutujate väärtused, mis muudavad avaldise tõeseks arvvõrduseks ja kuuluvad võrrandi määramispiirkonda, nimetatakse **võrrandi lahenditeks**.

Siinkohal oleks oluline märkida võrrandi lahendi ja vastava algebralise avaldise vahelist seost: võrrandi $f(x)=0$ lahendeid nimetatakse **algebralise avaldise $f(x)$ nullkohtadeks**, aga ka seda, et leitud lahendid on vastava **funktsiooni $\boldsymbol{y = f(x)}$ nullkohad** ning graafiliselt kujutavad lahendid vastava funktsiooni $y = f(x)$ graafiku lõikekohti – või siis puutekohti x-teljega:



Olgu avaldis $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Avaldise määramispiirkond: $x \in \mathbb{R}$.

Võrrand $x^3 - x^2 - 6x = 0$ lahendid on $x \in \{-2; 0; 3\}$.

Vastav polünoom tegurdub kujule $x^3 - x^2 - 6x = x(x + 2)(x - 3)$.

Funktsioon $y = x^3 - x^2 - 6x$, siis $X_0 = \{x | y = 0\} = \{-2; 0; 3\}$.

Võrrandi lahendi kontrollimine. Kui antud võrrandit on teisendatud nii, et iga järgnev võrrand on ekvivalentne (samaväärne) eelmisega, siis kontroll ei ole võrrandi koostisosa ja selle võib jätta tegemata. Nii on see lineaarsete ja ruutvõrrandite lahendamisel. Kui aga iga järgmine võrrand on eelneva võrrandi järeldus, siis võivad tekkida võõrlahendid, mis tuleb konntrolliga eraldada. Lahendamisel on tülikas kogu aeg jälgida, kas uus võrrand on eelmise järeldus või ekvivalentne eelneva võrrandiga. Seega on õpilasel lihtsam meelde jätta, et murd-, juur-, logaritm- ja trigonomeetriliste võrrandite puhul peab tegema kontrolli.

Kui aga võrrandiga lahendatakse tekstülesannet, siis on alati kontroll kohustuslik – mitte võrrandile vaid leitud lahendite sobivusele ülesande tekstiga.

Lineaar- ja ruutvõrrandite ning lineaarvõrrandite süsteemi lahendamine on III kooliastmes õpitud. Lisaks vajalikule kordamisele võiks vaadelda ülesandeid, mis ei ole tavalisel kujul või seotud parameetriga. Näiteks:

a) $(2x - 1)^2 = 49$, siin ei pea sulgusi avama, vaid $|2x - 1| = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 7 \\ 2x - 1 = -7 \end{cases}$.
b) võrrandi $2x^2 + bx - 18 = 0$ üheks lahendiks on 2. Leidke teine lahend ja lineaarliikme kordaja b;
c) koostada selline ruutvõrrand, mille lahendid on kolme võrra suuremad võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahenditest;
d) $(x - 1)^2 = x - 1$, et ei tohi jagada $(x - 1)$ – ga. Kaotatakse üks lahend;
e) Biruutvõrrand $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
f) kõrgema astme võrrandid, mis taanduvad ruutvõrrandi lahendamisele tegurdamise või muutuja vahetuse abil, siinkohal mõningaid näiteid:
   - $x^6 - 12x^5 + 32x^4 = 0$, teguri x^4 sulgude ette toomisel tekib korrutis: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.
   - $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$ et $x = 0$ ei ole lahendiks, siis jagades võrrandi pooli teguriga x^2, saab asenduse $x + \frac{1}{x} = a$ ruutvõrrandi $a^2 - 2a - 8 = 0$.
   - $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{3}$, abitundmatuga $\frac{x+1}{x-1} = t$ jõuame võrrandini $3t^2 - 10t + 3 = 0$.

Kokkuvõtlikult võiks öelda, et enne kui hakata avama sulgusid või midagi üldse teha, võiks vaadata võrrandit ja näha „ilusamaid“ lahendusideid.

Edasi peaks olema loogiline lahendada kahe tundmatuga lineaarvõrrandite süsteeme erineval viisil: liitmisvõtet, asendusvõtet, graafilist võtet ja determinante kasutades. Lihtne on seejärel üleminek ülesannetele, kus on kolm tundmatut ja tekib kolme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteem ning saab kasutusele võtta kolmerealise determinandi mõiste. Näiteks:

- Lahenda võrrandite süsteemid kasutades determinante:
  $\begin{cases} 9y + 5x = 5{,}5 \\ 2y + 3x = 1{,}6 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$
- Kullasepal on hõbedat prooviga 780 ja 880, kumbagi piisavas koguses. Tal on vaja tellimuse täitmiseks 5 kg hõbedat prooviga 840. Kui palju peab ta võtma hõbedat prooviga 780 ja kui palju prooviga 880?
- Tahvlile kirjutati kolm murdu. Kolmandik kolmandast murrust on sama suur kui esimene murd on väiksem arvust 1. Kui kolmandale murule liita neljandik esimesest murrust saadakse arv 1. Esimese murru ja teisest murrust poole summa on samuti 1. Leidke need kolm murdu.

Uueks võrrandiks on **murdvõrrand**, mille puhul olulisemaks on eespool õpitust tehted algebraliste avaldistega, et anda võrrandile kuju $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$. Murdvõrrandite kasutamise olulisus on seotud nende koostamise oskusega erinevate tekstülesannete lahendamisel ning oskusega elimineerida lahendite hulgast võõrlahendid, mis ei kuulu määramispiirkonda või ei sobi ülesande tekstiga. Tekstülesanded annavad võimaluse läbi tekstide näidata matemaatika olulisust situatsioonide kirjapanekul võrrandite abil.

- $\frac{2x}{x+3} - \frac{x}{3-x} = \frac{9}{4(x^2-9)}$ b) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$ jne…
- Millistel tundmatu a väärtustel murdude $\frac{2}{2x-1}$ ja $\frac{1}{1-3x}$ vahe on võrdne nende murdude korrutisega?
- Maantee asfalteerimisel kasutati kahte erineva võimsusega asfaldilaoturit. Mõlema masinaga laotati 10 km asfalti, kusjuures teine masin töötas ühe päeva vähem, kui esimene masin. Mitu kilomeetrit teed asfalteeriti mõlema laoturiga päevas, kui samaaegselt töötades asfalteerisid mõlemad masinad ühe päevaga kokku 4,5 km teed.

Juurvõrrandi lahendamist peaks käsitlema siis, kui on õpitud võrratuse lahendamine, sest ka üht juurt sisaldava võrrandi puhul peab kirja panema määramispiirkonna, kuna paarisarvulise juurija korral esialgsest võrrandist poolte astmesse tõstmisel saadakse esialgse võrrandi järeldus ja võimalus võõrlahendi tekkimiseks. Üht juurt sisaldava võrrandi lahendamine peaks olema rahuldav tase, aga hea taseme puhul peaks ikka lahendama ka raskemaid võrrandeid. Näiteks:

a) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-5} = 1$; b) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1$; c) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-8} = 3$;

d) $\begin{cases} \sqrt{2x+7} + \sqrt{y+15} = 7 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$;

Absoluutväärtust sisaldav võrrand peab süvendama teadmist, et arvu absoluutväärtus on positiivne arv, aga ka seda, et algebralise avaldise nullkoht on väärtus, millest ühel pool on avaldis positiivne ja teisel pool negatiivne ning kindalasti ka võrrandi määramispiirkonna mõistet (läbi n-ö osapiirkondade). Lisaks üht absoluutväärtust sisaldava avaldisega võrrandile peaks lahendama ka raskemaid võrrandeid. Näiteks:

a) $|x-1||x+1| = |x+5||x-5|$; b) $|2x-3| + |x-3| - |4x-1| = 0$;

c) $\frac{3+|x|}{|x-3|} = 3$; d) $\begin{cases} y - 5|x| + 7 = 0 \\ |y| + 3x - 1 = 0 \end{cases}$;

Võrrandisüsteemide käsitlus peaks olema eeltööks järgnevateks kursusteks. Milliseid süsteeme lahendada lisaks lineaarsetele? Soovitan lahendada neid kus on võimalik lisaks pea-aegu alati töötavale asendusvõttele kasutada erinevaid mõttekäike, st lahendamiseks on mitu teed: liita, lahutada, korrutada, jagada võrrandite vastavaid pooli, tekitades nii uue võrrandi (järelduse), mille saab lisada esialgsesse süsteemi ja siis lahendada. Kui süsteemis üks võrranditest on lineaarne, siis on mõttekas kasutada asendusvõtet. Näiteid:

a) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ x - y = -3 \end{cases}$ asendusvõttega: avaldame teisest võrrandist tundmatu x ja asendame esimesse võrrandisse. Aga miks mitte näidata alternatiive: anname esimesele võrrandile kuju $(x-y)^2 + xy = 63$, siis asendades teisest võrrandist saame uue süsteemi $\begin{cases} xy = 54 \\ x - y = -3 \end{cases}$ ja nüüd kasutame asendusvõtet;

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -15 \end{cases}$, võiks kasutada kohe asendusvõtet, aga miks mitte hoopis Viete' teoreemi;

c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}$, tavaliselt alustatakse murdude kaotamisest, sest$x \neq 0, y \neq 0$. Aga miks mitte liitmisvõte või hoopis abitundmatu$\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases}$;

d) $\begin{cases} xy^3 - x = 14 \\ xy^2 - xy = 4 \end{cases}$, tegurdame võrrandite vasakud pooled ja jagame seejärel võrrandite vastavad pooled, $\frac{x(y-1)(y^2+y+1)}{xy(y-1)} = \frac{14}{4}$. Taandame ja tulemuseks on ruutvõrrand.

Enamuse võrrandite ja võrrandisüsteemide korral on soovitav näidata, mida see graafiliselt tähendab. Selleks on väga heaks vahendiks programmid Wiris ja GeoGebra. Kursuse lõppedes peaks õpilane kindlasti oskama kasutada arvutialgebra programme võrrandisüsteemide lahendamisel ja determinantide arvutamisel.

Võrrandite koostamine ja lahendamine on vundamendiks kõikide järgnevate kursuste edukaks läbimiseks.

III kursuse algus – *LK õpilane peab nimetatud kursuse esimese osa lõpuks oskama lahendada lineaar-, ruut- ja murdvõrratusi (intervallmeetod) ja lihtsamaid võrratustesüsteeme.*

Uue õppekava järgi põhikoolis muutujat sisaldavaid võrratusi enam ei käsitleta, st et teema on õpilastele täiesti uus. Kuna võrratuste teema on edaspidiste kursuste jaoks väga oluline (näit funktsioonid), tuleb seetõttu selle kursuse sisu õpetamisele ja ka õppimisele eriliselt põhjalikult tähelepanu pöörata.

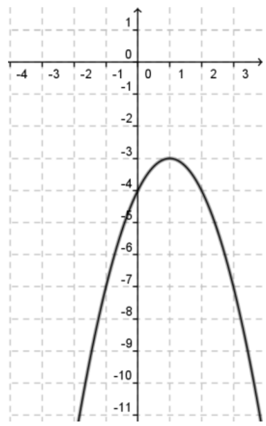
Alustama peaks arvvõrratusest ja selle omadustest ning alles siis käsitleda algebralisi võrratusi. Algebralise võrratuse lahendamine tähendab kõigi lahendite leidmist. Võrratuse lahendiks nimetatakse tundmatu väärtust, mis kuulub määramispiirkonda ja muudab võrratuse tõeseks arvvõrratuseks. Võrratusel võib olla üks, mitu, lõpmata palju lahendeid või hoopis lahendid puuduvad.

Võrratuste lahendamisel asendatakse antud võrratus samaväärse, kuid lihtsama võrratusega, kuni saadakse võrratus, mille lahendid on kergesti leitavad. Tavaliselt kasutatakse selleks teisendusi: võrratuse liikme kandmine ühelt võrratuse poolelt teisele poole, muutes seejuures ülekantava liikme märgi vastupidiseks; võrratuse mõlema poole korrutamine (jagamine) ühe ja sama nullist erineva arvuga, seejuures muutub võrratuse märk vastupidiseks kui korrutamine (jagamine) viidi läbi negatiivse arvuga. Alati ei õnnestu võrratust asendada samaväärsega, vaid järeldusega ja muutuda võib ka määramispiirkond. Järelikult on võrratuse määramispiirkonna leidmine ning selle arvestamine üks võrratuse lahendamise etappe.

Olulisim on eelnevatest kursustest oskus tegurdada hulkliikmeid, leida polünoomi nullkohti ja teada, et nullkoht on koht, kus avaldis muudab märki, et õpilane saaks kasutada intervallmeetodit. Samas on oluline ka see, et võrratusega otsitakse piirkonda, kus avaldis on positiivne või negatiive (range võrratus), mittepositiivne või mittenegatiivne (mitterange võrratus).

Taas on kasulik lineaarvõrratuste ja ruutvõrratuste puhul lahendust seostada vastavate graafikutega.

Võrratuse lahendamisel tasub juhtida tähelepanujuhtudele, kus lahendamisel saadaks tõene arvvõrratus või mittetõene arvvõrratus, st võrratuse lahendihulgaks on vastavalt kogu võrratuse määramispiirkond või lahendid puuduvad. Näiteks:



$x-3<-2+x \Leftrightarrow 0<1$ st $-\infty<x<\infty$ ehk $x \in (-\infty;\infty)$;
$-x^2+2x-4>0$, et diskriminant on negatiivne ja ruutliikme kordaja negatiivne, siis lahendid puuduvad ehk $x \in \emptyset$. Samaväärne sellega, et otsitakse piirkonda, kus funktsiooni $y=-x^2+2x-4$ väärtused on positiivsed (vt joonis).

Ruutvõrratuse korral on oluline seostada graafiku paiknemist sõltuvalt ruutliikme kordajast ja diskriminandist. Näiteks $x^2-6x+9 \le 0$, $x = 3$;

Samas võiks juhtida tähelepanu ka asjaolule, et $x^2-2x-15>0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3)>0$ ja korrutis on positiivne, kui tegurid on samamärgilised, st saame taandada kahe lineaarvõrratuste süsteemi lahendamisele: $\begin{cases} x-5<0 \\ x+3<0 \end{cases}$ või $\begin{cases} x-5>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ ja vastuseks on süsteemide lahendite ühend.

Samas võib ju neile, kel raske matemaatiliselt mõtelda, õpetada nii, et lineaar-, ruut- kui ka murdvõrratusi saab lahendada kõiki ühte moodi – kasutades intervallmeetodit; aga parem oleks ikka enne lahendamist hetk mõtelda – kuidas saaks teisiti. Näiteks $(x-3)^3(x+2)^2(x^2+1) \geq 0$, et ruut on positiivne või null kõikide reaalarvude korral ja $x^2+1>0$, siis sõltub korrutis vaid tegurist $x-3$ st $x-3 \geq 0$ ning $x+2=0$ st $x \in [3; \infty[\cup \{-2\}$.

Murdvõrratuste korral on olulisem tähelepanek, et range võrratuse korral $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (või < 0)on esialgne võrratus samaväärne võrratusega $f(x)g(x) > 0$ (või vastavalt < 0), sest jagatisel ja korrutisel on sama märk. Kui aga tegemist on mitterange võrratusega, siis nimetajas oleva avaldise nullkohad ei kuulu võrratuse määramispiirkonda ja seega ei kuulu ka lahendite hulka.

Kõikide võrratuste süsteemide korral on kõige tähtsam, et lahendatakse iga võrratus eraldi ja süsteemi lahendiks on iga süsteemi kuulunud võrratuse lahendihulkade ühisosa.

Kindlasti ei tasu jätta vaatlemata ülesandeid nagu näiteks:

- Millise arvu x väärtuse korral on murru $\frac{x+1}{x-3}$ väärtus suurem murru $\frac{x-2}{x-5}$ väärtusest?
- Milliste parameetri m väärtuste korral on võrrandil $mx^2-(3m+1)x+m=0$ kaks erinevat reaalset lahendit?
- Millistel arvu x väärtustel on avaldisel $y=\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}-\frac{1}{x+1}-5}$ väärtus?
- Millistel argumendi x väärtustel funktsiooni f(x) graafik on allpool funktsiooni g(x) graafikust, kui $f(x)=\frac{5x+4}{5x^2-6x+1}$ ja $g(x)=\frac{1}{x-2}$?

Teema kinnistamiseks tasub kindlasti vaadelda ka absoluutväärtust sisaldavate võrratuste lahendamist, aga ka lihtsamate ruutjuurvõrratuste lahendamist.

Algebraliste võrratuste lahendamine on otseselt seotud funktsiooni omaduste uurimisega ja teema rakendus samuti sellega seotud.

Algebra on vundament ja abivahend koolimatemaatikas olevate kursuste edukaks läbimiseks.

Kasutatud kirjandus:

1. „Aritmeetika ja algebra“ E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt, Tartu 1984.
2. „Võrrandi lahendite kontrolli didaktilisi probleeme“ K. Kuuse, K. Velsker „Haridus“ nr. 1, 1994.
3. „Algebra õpetamisest koolis“ T. Kaljas, R. Blumberg „Kolimatemaatika XXIII, Tartu 1996.
4. „Matemaatika X klassile“ T. Tõnso, A. Veelmaa, Tallinn 1993
5. „Matemaatika ülesannete kogu“ V. Luigekaht, E. Reiman, Tallinn 1995.
6. „Сборник заданий по математике“ С. Шевченко и др , Tallinn 2001.
7. „Математика 6000 задач и примеров“, А. М. Титаренко, Moskbva 2007.
8. http://mathandmultimedia.com/mathematics/
9. http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/index.htm
10. http://forums.cisco.com/CertCom/game/binary_game_page.htm.