Vektor. Joone võrrand. Analüütiline geomeetria.

Hele Kiisel, Hugo Treffneri Gümnaasium

Analüütilise geomeetria teemad on gümnaasiumi matemaatikakursuses jaotatud kaheks osaks: analüütiline geomeetria tasandil, mida õpetatakse nii kitsas kui laias kursuses 10. klassi viimase teemana ja analüütiline geomeetria ruumis, mida õpetatakse vaid laias matemaatikas 12. klassis. Esimene kursus kannab pealkirja „Vektor tasandil. Joone võrrand“ nii laias kui kitsas matemaatikas, kuid erinevused sisus on olulised.

Kitsas matemaatikas peab kolmanda kursuse lõpetaja oskama selgitada vektori mõistet ja selle koordinaate; liitma ja lahutama vektoreid ning korrutama vektoreid arvuga nii geomeetriliselt kui ka koordinaatkujul; arvutama vektori pikkust; leidma vektorite skalaarkorrutist ning tundma vektorite ristseisu ja kollineaarsuse tunnuseid. Õpilane koostab sirge võrrandi, kui sirge on määratud punkti ja tõusuga, tõusu ja algordinaadiga või kahe punktiga ning määrab sirgete vastastikuse asendi ja leiab vajadusel nende lõikepunkti. Õpilane tunneb ja joonestab sirgeid, paraboole ja ringjooni nende võrrandite järgi ning koostab ringjoone võrrandi keskpunkti ja raadiuse järgi. Samuti peab õpilane oskama leida joonte lõikepunkte, kui üks joontest on sirge, ja lahendama rakendusliku sisuga ülesandeid vektorite ja joonte võrrandite abil.

Laias kursuses peab õpilane – lisaks eelnevale – selgitama ka kahe vektori vahelist nurka, lahendama kolmnurka vektorite abil, leidma lõigu pikkust ja selle keskpunkti koordinaate, koostama sirge võrrandit ka punkti ja sihivektori kaudu ning teisendama kõiki sirge võrrandeid üldkujule. Õpilane leiab ka kahe sirge vahelise nurga, koostab hüperbooli, parabooli ja ringjoone võrrandeid ning leiab kahe joone lõikepunkte.

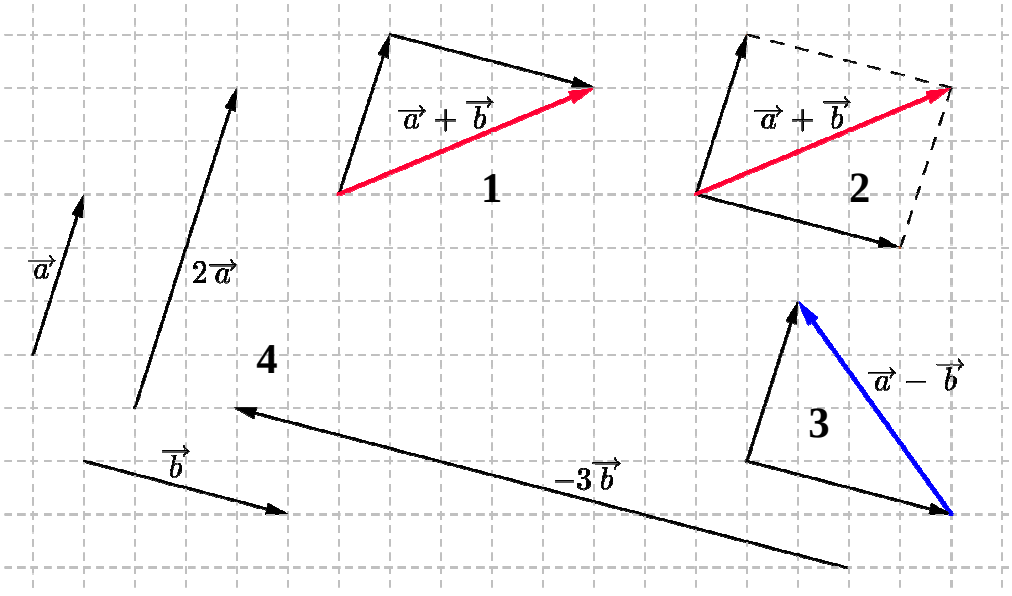
Soovitan kõigil õpetajatel tutvuda kirjastuse Avita poolt välja antud raamatuga „Gümnaasiumi kitsas matemaatika III. Vektor tasandil. Joone võrrand“. Õpik on ladusas keeles, rohkete illustratsioonidega, järgib hästi ainekava ning sisaldab rohkesti elulisi ülesandeid. Ülesannete raskusaste on kitsale kursusele vastav. Laia kursuse jaoks sobivad ka senini käibel olnud õpikud, kuid ainekava tuleb tõesti tähelepanelikult jälgida.

Enne vektori mõiste sissetoomist peaks kordama üle need teadmised, mis puudutavad koordinaatteljestikku ja punkti koordinaate. Selleks sobib kitsa kursuse õpiku alguses olev

lähtetest. Õpetaja otsustab klassi tasemest lähtudes, kas selle võib anda koduseks kordamiseks või on otstarbekam neid ülesandeid tunnis koos arutada. Edasi valib juba õpetaja, kas ta alustab lõigust ja selle keskpunktist või vektori mõistest. Lõigu keskpunkti koordinaatide leidmine tundub õpilastele alguses väga lihtne ja loogiline olevat, kuid pärast vektori koordinaatide tundmaõppimist leitakse keskpunkti asemel poolt vektorit. Sellisele põhimõttelisele veale tuleb tähelepanu juhtida ning minu arvates aitab, kui õpilane ise oma tehet suuliselt kommenteerib: “Leian lõigu *AB* keskpunkti *K* koordinaadid, selleks ….“, mitte „Leian pool vektorist $\overrightarrow{AB}$ “.

Vektori mõiste sissetoomisel tuleb rõhutada, et vektorit iseloomustavad kolm omadust: siht, suund ja pikkus. Selgitada tuleb sõnade „siht“ ja „suund“ erinevust. Kindlasti ei saa jätta selgitamata, et matemaatikas räägime vabavektorist ja füüsikas seotud vektorist.

Varasemates õpikutes olid tehted vektoritega geomeetriliselt ja analüütiliselt vaheldumisi. Panin tähele, et õpilastele osutuvad raskemaks geomeetrilised tehted. Soovitan kõigepealt tegelda vektorite liitmise, lahutamise ja arvuga korrutamisega geomeetriliselt.



Joonis 1

Rääkides vektoritest (joonis 1), mis on samasuunalised või vastassuunalised, jõuame kollineaarsete vektoriteni ning vektori korrutamiseni arvuga. Vektorite liitmisel on kõige olulisemaks kolmnurga reegel (1), mida mitu korda järjest rakendades jõuame hulknurga reeglini. Kasulik on näidata ka rööpküliku reeglit (2). See töötab hästi, kui vektorid on juba

ühisesse punkti rakendatud. Oluline on ka fakt, et rööpküliku teine diagonaal on nende vektorite vaheks (3). Geomeetriliste tehete juures vektoritega on oluline, et igal korral märgataks, kuidas vektorid rakendatakse (järjestikku või ühisesse alguspunkti) ja milline vektor on tulemuseks.

Kahe vektori vahe mõiste tuleb kas pähe õppida või näidata kohe alguses, et vektori lahutamise saab asendada vastandvektori liitmisega. Kunagi ammu õpetati vektorit põhikooli viimases klassis ja tolleaegses töövihikus olid väga head ülesanded. Enne vektori koordinaatide leidmist on aeg sisse tuua ühikvektorid ning näidata vektori avaldamist nende kaudu. Vektori koordinaatide leidmise reeglit on vaja osata selgitada (lugeda). Vektori pikkuse leidmine on ju Pythagorase teoreemi rakendamine. Analüütilises geomeetrias on tal väga oluline koht. Tehteid vektoritega koordinaatides on võimalik koordinaatteljestikus joonistega kinnitada. Oluline mõiste on „punkti kohavektor“. Liiga lihtne mõiste kipub meelest ära minema. Soovitan õpetajal teha õpilastele nende teemade käsitlemisel väiksemaid töid ja hoolikalt kontrollida tähistusi. Õpilaste tähelepanu tuleb ka vigadele juhtida.

Näiteks pakun etteütlust. Kirjuta sümbolites:

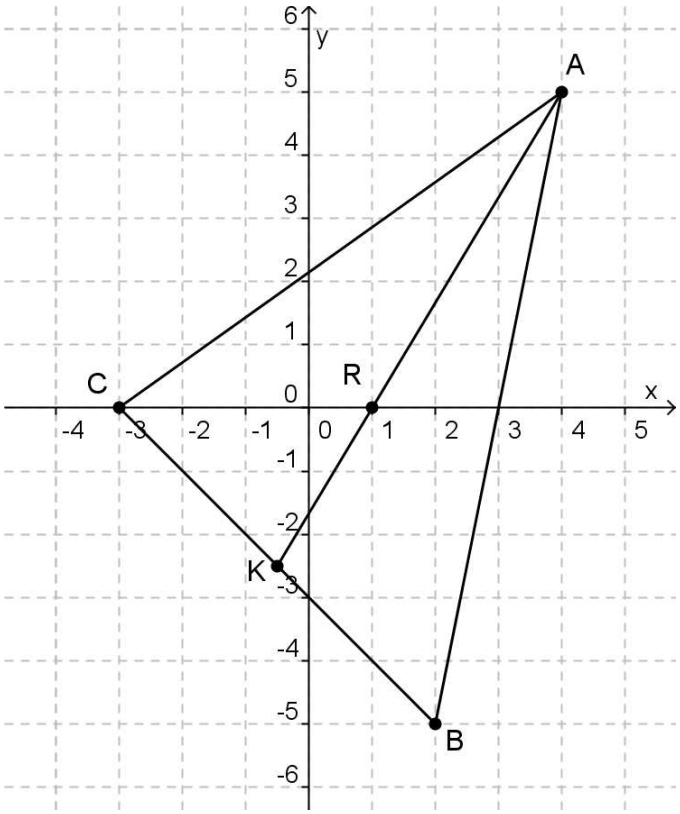
a) punkti *A* *x*-koordinaat on -2 ja *y*-koordinaat on 1;
b) vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid on 2 ja -6;
c) kui $A(2;3)$ ja $B(3;-1)$, siis lõigu *AB* keskpunkti *K* koordinaadid on …
d) vektori $\vec{a}=(-2;3)$ lõpp-punkti koordinaadid, kui vektor $\vec{a}$ on rakendatud punkti *A*(3;4) on …...

Nüüd on tarvis juhtida tähelepanu, et punkti koodinaatide puhul ei kasutata võrdusmärki, vektori koordinaatide juures aga kasutatakse. Seega ka lõigu keskpunkti koordinaatide leidmisel ei kasutata võrdusmärki.

Tublimatele õpilastele võib anda järgmise ülesande:
Leia kolmnurga *ABC* raskuskeskme koordinaadid, kui *A*(4;5), *B*(2;-5) ja *C*(-3;0).

Traditsiooniline lahenduskäik (joonis 2) näeks ette, et leitakse mediaan $\overrightarrow{AK}$, seejärel $\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$;

nüüd rakendatakse saadud vektor punkti *A* ning saadakse punkti *R* koordinaadid.



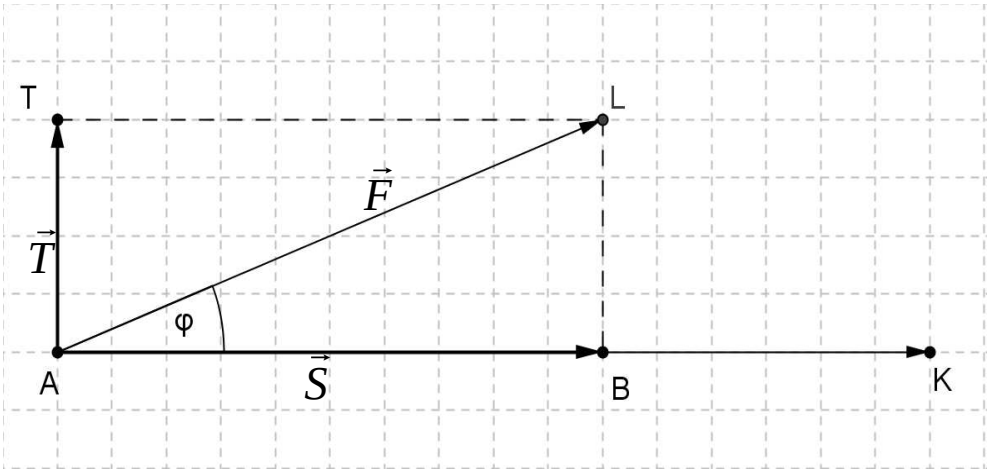
Joonis 2

Kui küsida, kas keegi tegi seda teisiti, siis leidub ehk õpilane, kes leidis kolmnurga tippude vastavate koordinaatide aritmeetilise keskmise ning saigi, et *R*(1;0). Seega saab püstitada hüpoteesi, et $R\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, kui kolmnurga tippude koordinaadid on $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ ja $(x_3;y_3)$. Nüüd tuleb see vaid üldkujus ära näidata. Soovitan proovida. Järgmisel sügisel mäletatakse hästi, et terve tahvel sai tõestust täis.

Kasutades joonist 2 tahan veelkord juhtida tähelepanu kohavektori mõistele. Kui rakendada vektor $\overrightarrow{AR}=(-3;-5)$ punkti *A*(4;5), siis punkti *R* koordinaatide saamiseks ei saa öelda, et liidan punkti *A* koordinaatidele vektori $\overrightarrow{AR}$ koordinaadid; õige oleks, et punkti *A* kohavektorile $\overrightarrow{OA}$ liidan vektori $\overrightarrow{AR}$ ja saan punkti *R* kohavektori $\overrightarrow{OR}=(1;0)$, millest järeldan, et *R*(1;0).

Vektorite skalaarkorrutise $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ definitsiooni võib küll pähe õppida ja rakendamise selgeks saada, kuid tema füüsikalisest tähendusest on ka tarvis aru saada.

Olgu meil tarvis vedada liivakott (joonis 3) punktist *A* punkti *K*. Kasutame vedamiseks jõudu $\vec{F}$, mis moodustab vedamise suunaga nurga φ. Füüsikast teame, et liikumise suunaline jõud teeb tööd (A), mis on võrdne selle jõu suuruse ja läbitud tee pikkuse korrutisega. Läbitud tee



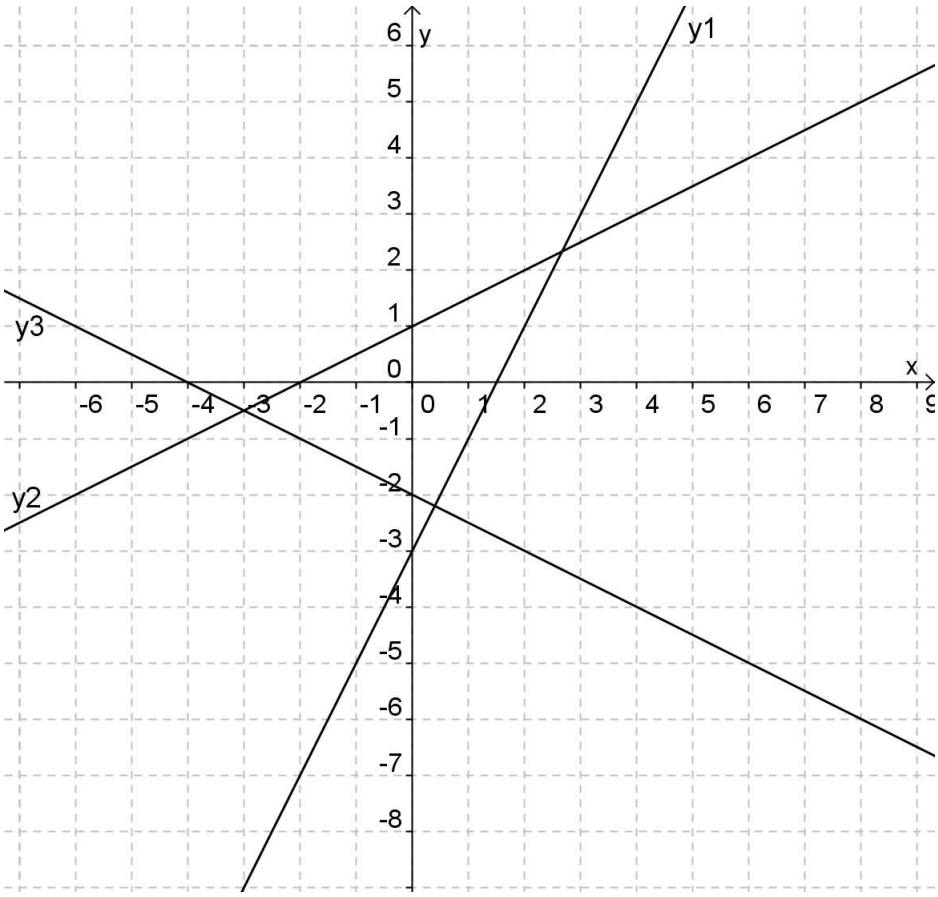
Joonis 3

pikkus on lõigu AK ehk vektori $\overrightarrow{AK}$ pikkus $\left|\overrightarrow{AK}\right|$. Jõud $\vec{F}$ lahutub kaheks komponendiks $\vec{T}$ (vertikaalsuunaline, ei avalda kasulikku jõudu) ja $\vec{S}$ (liikumissuunaline). Vektori $\vec{S}$ pikkuse saame avaldada kolmnurgast ABL. Saame, et

$\cos\varphi = \frac{AB}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{\left|\vec{S}\right|}{\left|\vec{F}\right|}$, millest $\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\varphi$ ning jõu töö avaldub kujul $A = \left|\overrightarrow{AK}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\varphi$.

Jääb loota, et uutes õpikutes on rohkem füüsikalise sisuga ülesandeid. Matemaatikas kasutame me skalaarkorrutist vektorite vahelise nurga leidmiseks. Laias kursuses lahendame kolmnurka vektoreid ja skalaarkorrutist kasutades.

Sirgete teema ei ole gümnaasiumis uudiseks, sest lineaarfunktsiooniga tegeldi juba põhikoolis. Võibki alustada sirgete joonestamisest etteantud valemi järgi. Näiteks $y_1 = 2x - 3$, $y_2 = 0{,}5x + 1$ ja $2x + 4y = -8$ asuvad joonisel 4. Joonestamisega koos saab meelde tuletada lineaarfunktsiooni liikmete nimed ja kordajate tähendused.



Joonis 4

Järgmisena laseksin õpilastel joonestada sirgeid erinevate andmete põhjal. Näiteks:

a) antud on kaks punkti $A(-4;3)$ ja $B(2;-4)$;

b) antud on punkt $C(3;4)$ ja sirge tõus 1;

c) antud on punkt $D(2;-3)$ ja sirge tõusunurk 60°;

d) antud on punkt $E(-4;-2)$ ja sihivektor $\vec{s} = (3;1)$;

e) antud on punkt $F(5;2)$ ja on teada, et sirge on paralleelne *y*-teljega;

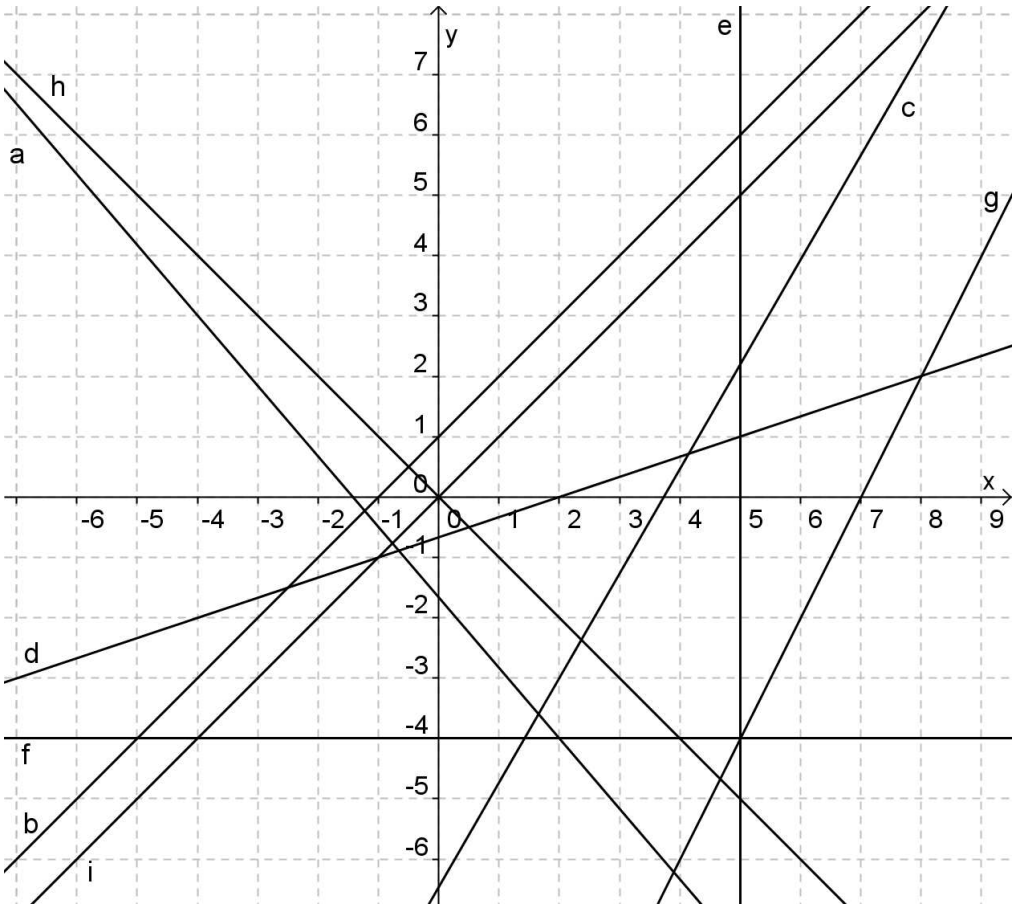
f) antud on punkt $G(0;-4)$ ja on teada, et sirge on paralleelne *x*-teljega;

g) sirge läbib punkti $H(5;-4)$ ja on paralleelne sirgega $y_1 = 2x - 3$;

h) sirge poolitab koordinaattasandi II ja IV veerandi;

i) sirge poolitab koordinaattasandi I ja III veerandi.

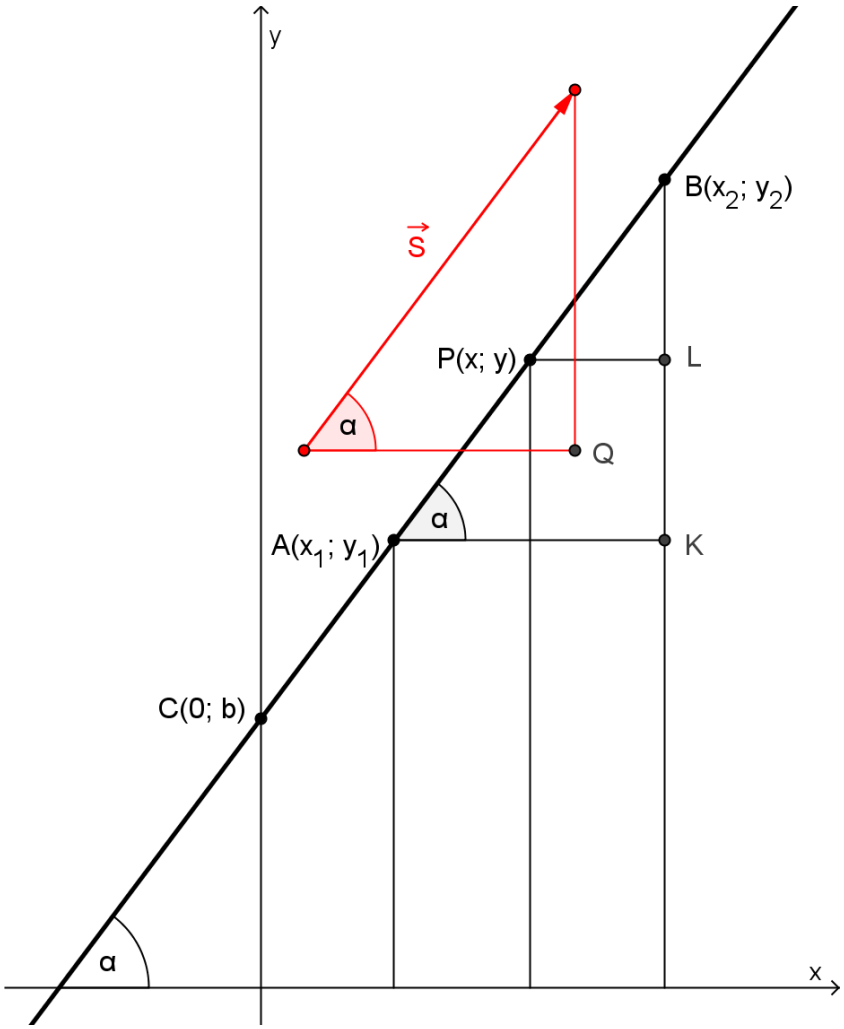
Saame järgmise joonise (vt joonis 5):



Joonis 5

Märkame, et suudame sirgeid joonistada erinevate andmete järgi. Kas me suudame ka sirgete järgi võrrandid välja mõelda? Vaatleme saadud jooniseid ja püüame leida nende tõusud ning algordinaadid. Mõnel juhul see õnnestub hästi, mõnel juhul peame vastuse andma väga ligikaudselt. Järelikult on joonisest vähe ja tuleb teadmisi laiendada.

Asudes tuletama sirgete võrrandeid, peab meeles pidama, et kitsas kursuses koostatakse võrrandit kahe punkti, punkti ja tõusu ning punkti ja algordinaadi abil; lisaks ka telgedega paralleelsete sirgete võrrandid. Laias matemaatikas koostatakse sirge võrrandit ka punkti ja sihivektori abil ning teisendatakse sirgeid üldkujule. Eks iga õpetaja otsustab ise, kas ta tuletab need võrrandid eraldi või võtab kõik koos korraga ette. Kitsas kursuses võiks seda teha ükshaaval. Laias kursuses võib kasutada ka sirge tõusu väljakirjutamist mitmel erineval viisil.



Joonis 6

Olen oma praktikas seda kasutanud. Joonistan ühe sirge (joonis 6) ja kannan sinna kõik sirgete võrrandite koostamiseks vajalikud andmed (2 punkti, tõusunurk, sihivektor, sirge suvaline punkt, lõikepunkt y-teljega). Märkame koos õpilastega, et sirge tõusu saab esitada mitmel moel. Sirge tõusuks on tõusunurga tangens, mida saab avaldada kõigist joonisele tekkinud kolmnurkadest ja ka sihivektori koordinaatide abil. Saame, et

$$k = \tan\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_s}{x_s}$$

(1.) (2.) (3.) (4.) (5.)

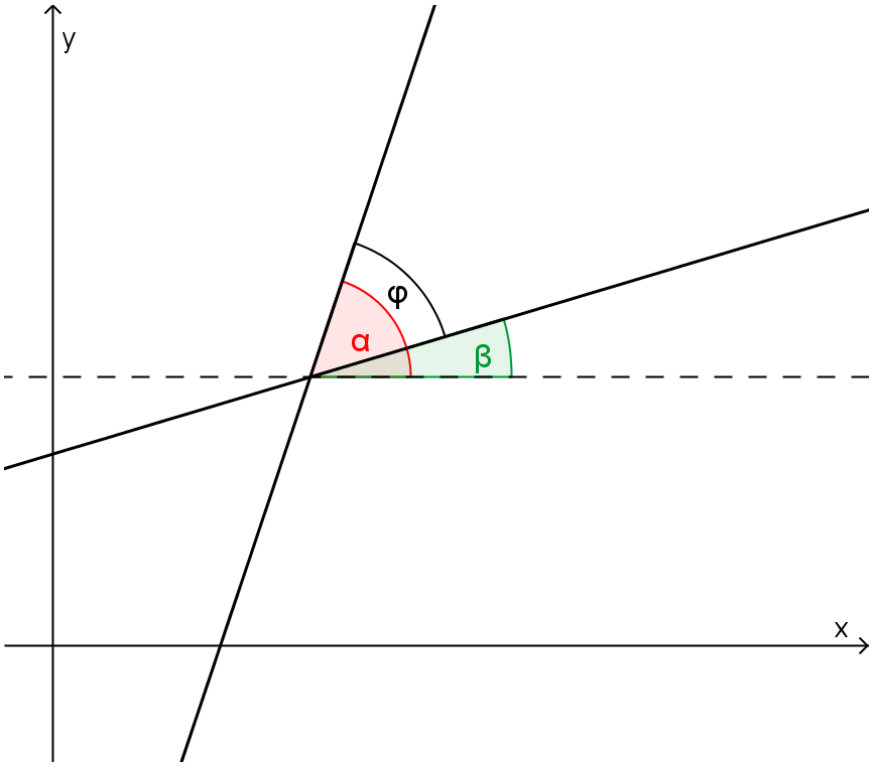
Kui neid nüüd 2-kaupa kokku panna, saame kõikvõimalikud sirgete võrrandid. Näiteks annavad 3. ja 4. osa sirge võrrandi kahe punkti abil $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Kui sellesse võrrandisse asendada punktid *x*- ja *y*-teljelt, saame sirge võrrandi telglõikudes. Kui aga nimetajas olevaid punktide koordinaatide vahesid vaadelda vektorite koordinaatidena, siis

ongi meil sirge võrrand punkti ja sihivektori kaudu $\frac{y-y_1}{y_s}=\frac{x-x_1}{x_s}$. Võrduse 1. ja 3. osa annavad sirge võrrandi punkti ja tõusu kaudu $y-y_1=k(x-x_1)$, millest omakorda saab punkti A punktiga C asendades sirge võrrandi tõusu ja algorinaadi järgi $y=kx+b$. Siit järeldus: väga hästi peab tundma sirge võrrandeid kahe punkti ja punkti ning tõusu kaudu, kõik ülejäänud on vaid tõlgendamise küsimus. Oma riigieksamite hindaja kogemustele toetudes pean tunnistama, et kõige keerulisemaks osutub *y*-teljega paralleelse sirge võrrandi kirjutamine, sest kõik funktsioonid algavad ju *y* = …., nüüd järsku näiteks $x = 3$.

Loomulikult võib sirgete võrrandid tuletada ka vektorite kollineaarsust kasutades.

Sirgete vastastikuste asendite määramist on õpitud põhikoolis (lineaarvõrrandite süsteemi lahendite arvu leidmine), nüüd saab ka teisi võimalusi pakkuda. Nurga leidmiseks kahe sirge vahel kasutatakse tavaliselt valemit $\tan\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$. Mida teha siis, kui valem meelest läks?

Lihtne on sirgetevahelist nurka leida tõusunurkade vahena. Olgu ühe sirge tõus (joonis 7) k_1 ja seega tõusunurk $\alpha=\arctan k_1$ ning teise sirge tõus k_2 ja tõusunurk $\beta=\arctan k_2$, siis nurk sirgete vahel on $\varphi=\alpha-\beta$. Lihtne ja töötab alati. Sirgetevahelise nurga leidmiseks võib kasutada ka nende sihivektoreid või normaalvektoreid koos skalaarkorrutisega. Oluline on õpilastele näidata, kuidas sirge võrrandist sihivektorite koordinaate lugeda.



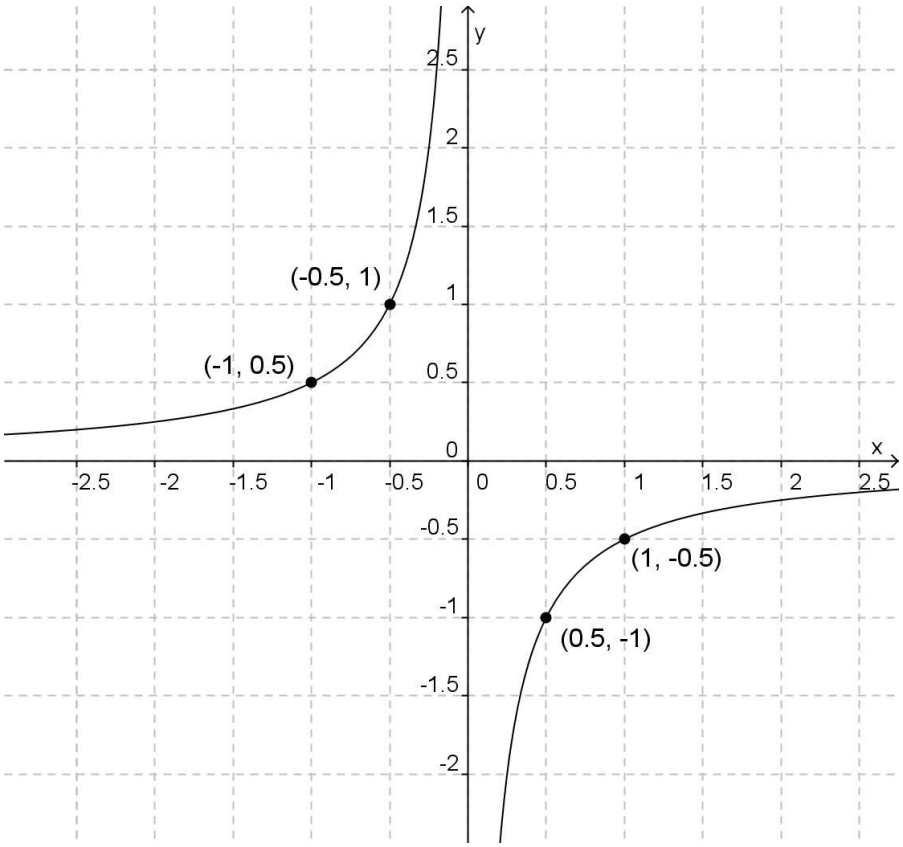
Joonis 7

Normaalvektori mõisteni jõutakse laia matemaatika 12. kursuses „Geomeetria I“. Tasandi võrrandi koostamisel lähtutakse normaalvektori (tasandiga risti oleva vektori) ja tasandil asetseva vektori ristseisust (skalaarkorrutis on võrdne nulliga). Nüüd võib näidata, et ka tasandil paikneva sirge võrrandit võib koostada sirgega risti oleva vektori (normaalvektori) ja sirgel asuva vektori ristseisust lähtudes. Miks see hea on? Kui sirge on antud võrrandiga $2x+3y=23$, siis saame võrrandist lugeda normaalvektori $\vec{n}=(2;3)$, mida saaks kasutada sirgete vahelise nurga leidmisel sihivektorite asemel. Normaalvektori kasutamist võibki näidata kas tasandi võrrandi õpetamise juures või eksamieelse kordamise ajal.

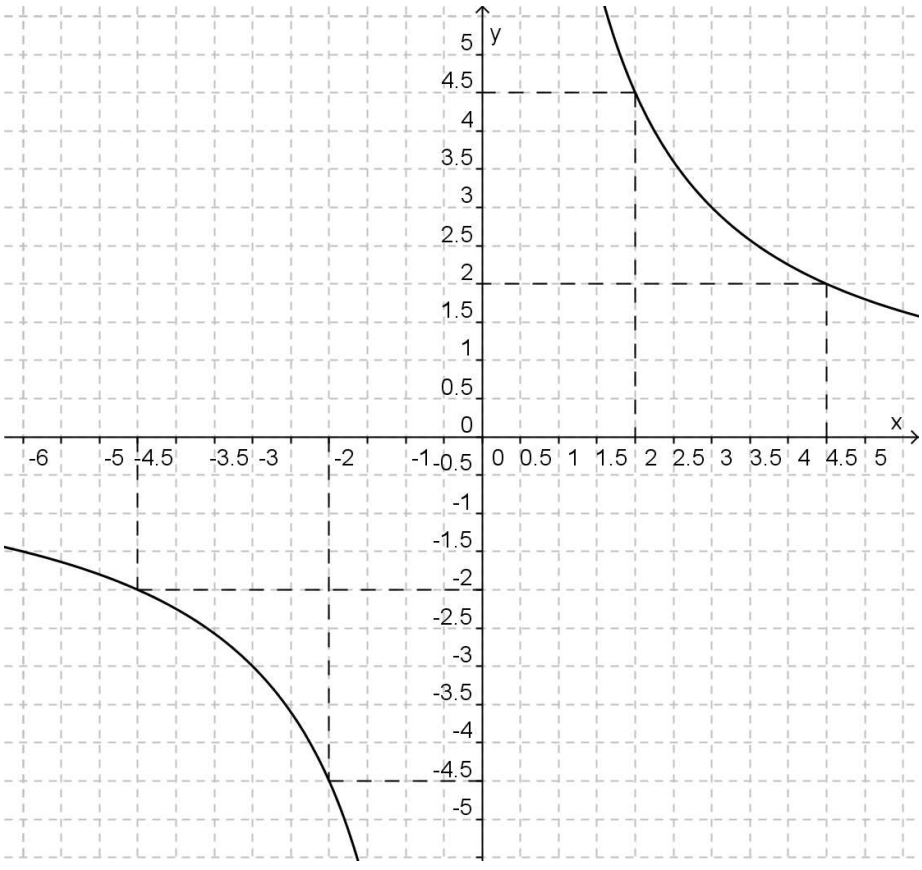
Normaalvektorite kasutamiseni jõutakse tavaliselt alles ruumigeomeetrias, sest ainekavasse jõuab normaalvektori mõiste koos tasandi võrrandiga. Seega sobib normaalvektor sirgetevahelise nurga leidmiseks eksamieelsel kordamisel.

Sirgete võrrandite abil saab kirjeldada ühtlast liikumist, temperatuuri muutusi, ürituse korraldamisel ruumi ja toidu peale tehtavaid kulutusi, loodusressursside kasutamist jne (vaata õpikuid ja jälgi meedias toodud graafikuid). Saame õpilastele näidata, et õpitut on võimalik rakendada elus toimuvate protsesside kirjeldamiseks.

Ruutfunktsiooni ja pöördvõrdelise seose graafikute joonestamisega ette antud valemi järgi on juba põhikoolis tegeldud. Sellest tuleks nüüdki alustada – joonestada graafikuid nii paberil kui arvuti abil, meenutada kõiki ruutfunktsiooni graafikuga seotud mõisteid (nullkohad, nende arv, avanemine, telg, haripunkt, lõikepunktid telgedega). Kitsa kursuse õppijad sellega piirduvadki, st parabooli ja hüperbooli võrrandeid nad koostama ei pea. Laias kursuses võib õpetaja graafiku ette anda ja lasta joone võrrandi ära arvata. Näiteks allpool toodud hüperboolide (joonis 8 ja 9) korral saame, et $y=\frac{-0{,}5}{x}$ ja $y=\frac{9}{x}$. Vajalikud andmed tuleb õpilasel lugeda jooniselt, arutledes enne, milliseid fakte üldse vaja läheb.

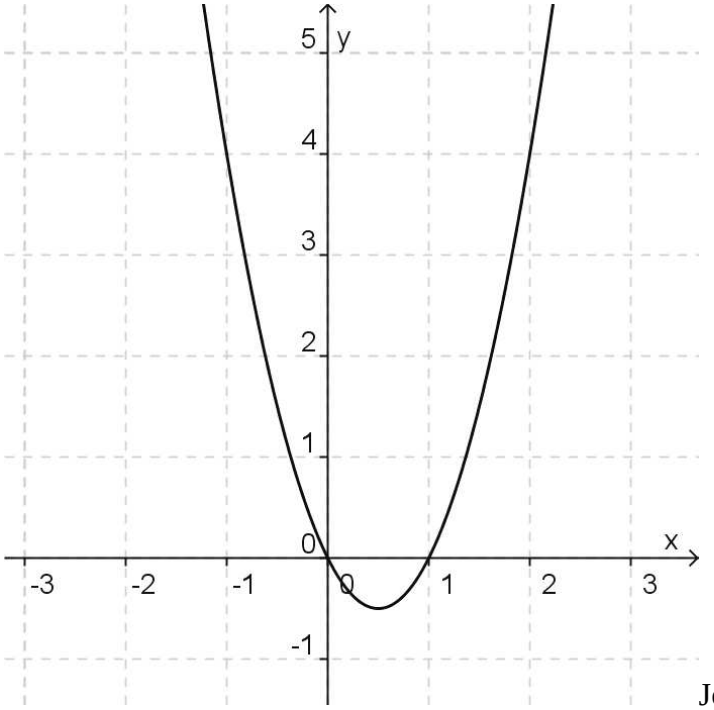


Joonis 8



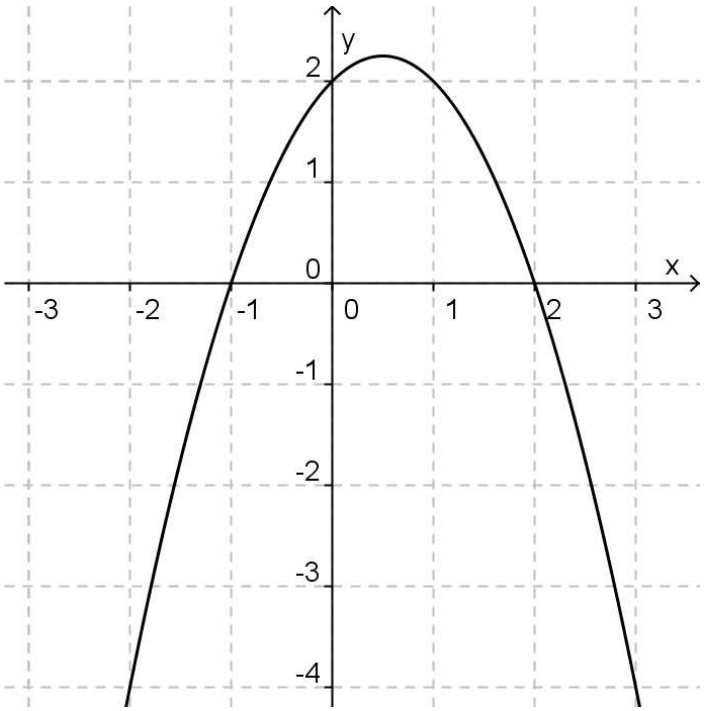
Joonis 9

Analoogselt saab käituda ka parabooliga: kõigepealt skitseerime graafiku valemi järgi, siis analüüsime, milliseid andmeid on vaja, et valemit joonise järgi tuletada. Ühiselt arutledes jõutakse järeldusele, et valemis $y = ax^2 + bx + c$ kordajate *a, b* ja *c* määramiseks vajame kolme punkti koordinaate. Võtame (joonis 10) punktid *A*(-1;4), *B*(1;0) ja *C*(2;4) ning asetame



Joonis 10

saadud koordinaadid võrrandisse. Saame 3 muutujaga kolmest võrrandist koosneva süsteemi kordajate *a, b* ja *c* suhtes: $\begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases}$. Lahendades saame: $a = 2$, $b = -2$ ja $c = 0$ ehk $y = 2x^2 - 2x$. Kas saame seda teha ka teisiti? Õpilased pakuvad kindlasti kohe nullkohti. Kasutades joonist 11, saame, et $x_1 = -1$ ja $x_2 = 2$. Teades, et $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, saame $y = a(x + 1)(x - 2)$ ning tundmatuks jääb vaid kordaja *a*. Selle leidmiseks valime jooniselt veel ühe punkti, näiteks (0;2). Asendame selle võrrandisse $2 = a(0 + 1)(0 - 2)$ ja saame, et $a = -1$ ning valemi paraboolile $y = -1(x + 1)(x - 2) = -x^2 + x + 2$.



Joonis 11

Kindlasti on tarvis lahendada tekstist arusaamise oskusele suunatud ülesandeid.

Näiteks: leidke ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ kordajad, kui $x = 6$ on ruutfunktsiooni nullkoht ja vähim väärtus -8 on kohal $x = 4$.

Kas õpilased saavad aru:

- et miinimumpunkti koordinaadid on (4;-8);
- seega parabool avaneb ülespoole;
- kui üks nullkohtadest on kohal 6, siis teine on kohal 2 (sest parabooli telg on $x = 4$).

Nüüd on olemas vajalik info kordajate leidmiseks.

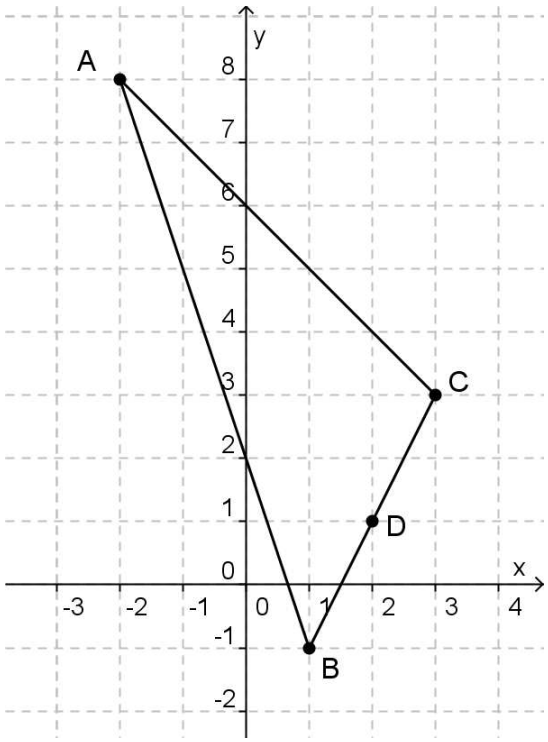
Iga võtte omandamiseks tuleb lahendada teatud arv ülesandeid, kuid neid tulebki erinevalt esitada – sõnastada.

Ringjoonega on tegeldud põhikoolis planimeetria ülesandeid lahendades. Tuletage meelde ringjoone definitsioon ja näidake ringjoone võrrandi saamist koordinaatteljestikus. Valem võib õpilastel meelest minna, kuid tekkinud pilt peaks jääma silmade ette. Kindlasti tasub toonitada, et me kasutame jälle Pythagorase teoreemi. Kitsas kursuses piirdutakse põhivalemi rakendamisega, st koostatakse ringjoone võrrand etteantud keskpunkti ja raadiuse järgi. Laias kursuses saab eelnevalt lasta leida ka võrrandi kirjutamiseks vajalikke lähteandmeid. Mulle

endale meeldivad kombineeritud üleanded, kus õpilane peab kasutama erinevaid teadmisi loovalt.

Näiteks: kolmnurk *ABC* on antud oma tippudega *A*(-2;8), *B*(1;-1) ja *C*(3;3) (joonis 12).

* Leia külgede *AC* ja *BC* pikkused ning kolmnurga sisenurk tipu *C* juures.
* Arvuta kolmnurga pindala.
* Leia vektori $\overrightarrow{AD}$ koordinaadid ja pikkus, kui *D* on külje *BC* keskpunkt.
* Leia sirge *AD* võrrand. Millist nime kannab lõik *AD* kolmnurgas *ABC*?
* Leia külje *AB* keskristsirge võrrand ja tipust *B* tõmmatud kolmnurga kõrguse võrrand.
* Leia kolmnurga tippe läbiva parabooli võrrand.
* Leia kolmnurga *ABC* ümberringjoone võrrand.



Joonis 12

Selles ülesandes on seotud kogu analüütilise geomeetria kursus. Tuleb märgata, et kogu lahendust toetab suurel määral joonis. Õpilastel on võimalus joonist kogu aeg täiendada ja visuaalselt hinnata oma arvutuste abil saadud tulemusi. Pööran tähelepanu kolmnurga ümberringjoone võrrandi koostamise erinevatele võimalustele. Senistel riigieksamitel on õpilased kasutanud selleks kolme moodust:

1. Otsitakse ringjoone keskpunkti koordinaate ja raadiust. Selleks asendatakse ringjoone võrrandisse kolmnurga tippude koordinaadid ja saadakse kolmest muutujast koosnev

süsteem $\begin{cases}(-2-a)^2+(8-b)^2=r^2\\(1-a)^2+(-1-b)^2=r^2\\(3-a)^2+(3-b)^2=r^2\end{cases}$.

Sellise süsteemi lahendamise ideid peab õpetaja kindlasti näitama, sest õpilased ei pruugi ise ratsionaalse võtteni jõuda.

2. Kuna ühes alaülesandes on juba *AB* keskristsirge võrrand ($3y-x=11$) leitud ja teades, et kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub keskristsirgete lõikepunktis, piisab, kui leiame teise keskristsirge võrrandi. Kasutame selleks külge *AC*. Selle külje keskpunkti E koordinaadid on (0,5; 5,5) ja tõus $k=1$ (sest *AC* tõus on -1). Saame süsteemi $\begin{cases}3y-x=11\\y-x=5\end{cases}$, millest ringjoone keskpunkti koordinaadid on *O*(-2;3) ja raadius 5 (näiteks *OA* pikkus).

3. Ringjoone võrrandi võib anda ka kujul $x^2+y^2+ex+fy+g=0$. Kui siia asendada nüüd kolmnurga tippude koordinaadid, saame süsteemi: $\begin{cases}4+64-2e+8f+g=0\\1+1+e-f+g=0\\9+9+3e+3f+g=0\end{cases}$, millest e = 4, f = -6 ja g = -12. Saame $x^2+y^2+4x-6y-12=0$. Soovi korral võime saadud tulemuse teisendada kujule $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.

Samuti võib lasta leida saadud ringjoone pikkust, ringi pindala ja ringjoonele puutujate võrrandeid.

Antud kursust saab ainesiseselt lõimida „Funktsioonid I“ kursusega, planimeetria kordamisega ning laia matemaatika 12. kursusega. Ülesannete lahendamisega saab tähelepanu juhtida läbivatele teemadele „Elukestev õpe ja karjääriplaneerimine“ (hotelli pidamine, liikluse korraldamine jne) , „Keskkond ja jätkusuutlik areng“ (ressursside otstarbekas kasutamine), „Teabekeskkond“ (leia meedias ilmunud graafik ja koosta ise ülesanne) ja „Tervis ja ohutus“ (sõidukite liikumise kiirust ja haiguste levikut puudutavate graafikute uurimine). Samuti saab ülesannete lahendamise käigus arendada ettevõtlikkus-, enesemääratlus-ja õpipädevust ning sotsiaalset pädevust. Ülesannete keerukust saab valida vastavalt klassi tasemele, samas saab tublimatele anda keerukamaid ja mitterutiinseid ülesandeid ning lasta neil ka ise ülesandeid koostada. Kolleegide poolt valmistatud materjale leiab Koolielu portaalist http://koolielu.ee/pg/waramu/browse2/curriculumSubject/78905838 ning matemaatikaõpetajate virtuaalse võrgustiku kodulehelt: http://mott.edu.ee.

Laia matemaatika 12. kursuse „Geomeetria I“ lõppedes peab õpilane oskama kirjeldada punkti koordinaate ruumis, selgitama ruumivektori mõistet, tegema lineaartehteid vektoritega, teadma vektorite kollineaarsuse ja komplanaarsuse tunnuseid ning vektorite skalaarkorrutist, arvutama kahe punkti vahelist kaugust, vektori pikkust ning kahe vektori vahelist nurka. Samuti tuletab õpilane sirge ja tasandi võrrandid ning kirjeldab sirge ja tasandi vastastikuseid asendeid, koostab sirge ja tasandi võrrandeid, määrab võrranditega antud kahe sirge ja tasandi, kahe tasandi vastastikuse asendi ning arvutab nurga nende vahel. Õpilane kasutab neid teadmisi geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesannete lahendamisel.

Enne ruumigeomeetria juurde asumist tuleb kindlasti tuletada meelde 10. klassi viimases kursuses õpitu ning natuke korrata ka tasandigeomeetriat (kolmnurk, ringjoon, puutuja jne). Kohe alguses tuleb aga märkida, et selle teema käsitlemisel on suureks abiks Jane Albre koostatud dünaamilised slaidid, mida on kõigil võimalik kasutada. Leiate need matemaatikaõpetajate virtuaalse võrgustiku kodulehelt, lisaks tasub vaadata ka Koolielus olevaid materjale. Kursus algab punkti asukoha määramisega ruumis ning kahe punkti vahelise kauguse leidmisega. Siin oleks hea demonstreerida ka olukorda, kus punktid jäävad pildil üksteise taha ja tundub, nagu kaugust ei olekski. See on olukord, millega saame näidata, et joonis meid alati ei aita ja seega on tarvis appi võtta valemid.
Olulisel kohal on stereomeetria asendilaused: nurk kahe sirge, sirge ja tasandi ning kahe tasandi vahel, sirgete ja tasandite ristseis ning paralleelsus, kolme ristsirge teoreem, hulknurga projektsiooni pindala. Neid mõisteid omandamata pole võimalik hiljem klassikalise stereomeetria ülesandeid lahendada. Tuleb tuua hulgaliselt näiteid klassiruumist, „mängida“ pliiatsite (kui sirge) ja raamatutega (kui tasand). Võib kasutada ruumiliste kehade mudeleid, kus servad on sirgeteks ja tahud tasanditeks. Suurt tähelepanu tuleb pöörata kolme ristsirge teoreemile ja kahetahulise nurga mõistele, mis paljudele lastele jääb arusaamatuks. Nende mõistete tundmiseta pole võimalik lahendada püramiidi ülesandeid järgmises kursuses. Hulknurga (kolmnurga) projektsiooni pindala arvutamise valemi tuletamisel aitab kaasa J. Albre vastav slaid ja kindlasti ka mudelite (kui neid koolis leidub) kasutamine.
Tehted vektoritega ruumis omandatakse õpilaste poolt hästi vaid sel juhul, kui ta sai need selgeks 10. klassis. Tuletades seal õpitu kiiresti meelde, saab väga paljus tugineda analoogiale. Õpilased jõuavad kiiresti järeldusele, et lisandub ainult kolmas koordinaat ning kõik tehted vektoritega koordinaatides toimuvad analoogselt tasandiga (vektorite liitmine, lahutamine, korrutamine arvuga, pikkuse ja skalaarkorrutise leidmine). Küll on aga tunduvalt keerulisem teha vektoritega tehteid geomeetriliselt. Eriti raske on see õpilastel, kellel puudub

ruumitaju. Vektorite kollineaarsusele ja ristseisule lisandub nende komplanaarsuse mõiste. Õppekavas pole segakorrutise mõistet ning seega ei saa me mittekomplanaarsust siduda kolme vektoriga määratud rööptahuka ruumalaga. Küll võime arutada, kas nelja punktiga on määratud püramiid või mitte.

Näiteks: kas punktid A(-2;10;5), B(4;-4;3), C(3;4;7) ja D(2;-5;0) võivad olla kolmnurkse püramiidi tippudeks?

Nüüd peab õpilane mõtlema, milline on püramiid. Peab aru saama, et sel juhul on 3 punktiga määratud püramiidi põhi ja neljas on püramiidi tipuks. Järelikult ei saa nende nelja punkti abil moodustatud vektorid olla komplanaarsed. Seega tuleb tal kontrollida, kas vektorid on komplanaarsed või mitte. Antud näite korral osutuvad vektorid komplanaarseteks ning järelikult ei saa need punktid esitada püramiidi. Oluline on ka näidata, et iga vektorit ruumis saab avaldada kolme mistahes mittekomplanaarse vektori abil.

Asudes koostama sirgete võrrandeid ruumis, tasub meelde tuletada eelnev tasandil. Kui seejärel küsida, milliste andmete järgi saaksime kirjeldada sirget ruumis, siis kuulete ikka, et tõusu ja punkti abil, jne. Nüüd saabki küsida, kuidas nad kirjeldaksid ühe sirge tõusu ruumis – ja ei osata ära seletada. Kahjuks saamegi lähtuda vaid kahe vektori kollineaaarsusest. Oluline, et õpilased märkaksid – sirge määravad punkt ja sihivektor, mida me alati suudame sirge võrrandist lugeda. Nende abil saame otsustada sirgete vastastikuse asendi üle ja leida nendevahelise nurga. Võrreldes tasandiga lisandub ruumis uus mõiste – kiivsed sirged. Õpilane peab suutma leida ka sirgete lõikepunkti.

Tasandi võrrandi koostamise aluseks on kaks võimalust: 1) normaalvektori ristseis tasandil asuva vektoriga (normaalvektori ja tasandil asuva vektori skalaarkorrutis on null); 2) kolme vektori komplanaarsus (kolme vektori koordinaatidest moodustatud determinant on null). Kahe tasandi vastastikuse asendi määramiseks vajame nende normaalvektoreid, samuti saame nende abil (kasutades skalaarkorrutist) leida tasanditevahelise nurga.

Sirge ja tasandi vastastikuse asendi määrame sirge punkti ja sihivektori ning tasandi normaalvektori abil. Õpilane leiab ka sirge ja tasandi vahelise nurga (sihivektori ja normaalvektori skalaarkorrutist kasutades) ning nende lõikepunkti (võrrandite süsteemi lahendades).

Õpetaja võib julgelt toetuda käibel olevatele õpikutele (sobivad ka varem ilmunud, jälgige vaid raskusastet) ning kasutada kolleegide poolt valmistatud õppematerjale, mida leiab nii Koolielu kui matemaatikaõpetajate virtuaalse võrgustiku kodulehelt.

Kasutatud kirjandus:

1. Tõnso, T., Veelmaa, A. (1998). Matemaatika X klassile. Tallinn: Mathema.
2. Tõnso, T., Veelmaa, A. (1996). Matemaatika XII klassile. Tallinn: Mathema.
3. Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2002). Matemaatika 10. klassile. Tallinn: Koolibri.
4. Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2003). Matemaatika 12. klassile. Tallinn: Koolibri.
5. Afanasjeva, H., Afanasjev, J. (2012).Gümnaasiumi kitsas matemaatika III. Vektor tasandil. Joone võrrand. Tallinn: Avita.
6. Koolielu: http://koolielu.ee/pg/waramu/browse2/curriculumSubject/78905838
7. Matemaatikaõpetajate virtuaalne võrgustik: http://mott.edu.ee
8. Gümnaasiumi õppekava: www.oppekava.ee