Eksponent- ja logaritmfunktsioon ning eksponent- ja logaritmvõrrandid

Dots. emeeritus Kalle Velsker

Koolimatemaatika kitsa kursuse ainekavas kuulub pealkirjas märgitud temaatika kursuse „Funktsioonid I“ alla, hõlmates sellest peaaegu poole. Laia kursuse ainekavas moodustab see omaette kursuse „Funktsioonid II“. Üsna tihti võib kohata arvamust, et funktsioonide $y = a^x$ ja $y = \log_a x$ käsitlemine on koolis vajalik, kuna funktsioonide abil kirjeldatakse ja uuritakse paljusid nähtusi teistes teadustes ning igapäevaelus, aga arvu logaritmi mõiste ja sellega seotud teoreemide ja valemite käsitlemine on anakronism, sest logaritme ei kasutata juba ammu enam arvutusvahendina ja arvelaua ning arvutuslükati asemel on nüüd nii igapäevaelus kui ka koolis tasku- ja muud arvutid. Väide arvu logaritmi kohta on suures osas väär. Tõsi, arvude kirjalikku korrutamist, jagamist, astendamist ja juurimist tehakse arvutite abil, aga empiiriliste andmete põhjal eksponentsiaalse kasvamise või kahanemise mudeli koostamisel jõutakse peaaegu alati võrrandisüsteemideni, mille lahendamine logaritme tundmata on praktiliselt võimatu. Samasugune olukord on siis, kui tuleb uurida keerulisemat logaritmfunktsiooni, näiteks leida nullkohti, üldisemalt öeldes – lahendada logaritmvõrrandeid. Võrreldes kitsa ja laia kursuse ainekava ülesehitust kõnealuse temaatika piires, soovitaksin ka kitsa kursuse korral käsitleda ainet samas järjekorras, kui on pakutud laia kursuse puhul. See oleks järgmine: esmalt käsitleda liitprotsendilist kasvamist ja kahanemist, mis oma elulisusega oleks heaks põhjenduseks eksponentfunktsiooni ja tema omaduste käsitlemisele. Edasi järgneks arvu logaritmi ja selle loomuliku jätkuna logaritmfunktsiooni käsitlemine. Kõnealuse temaatika lõpetaks eksponent- ja logaritmvõrrandid ning -võrratused (viimased vaid laias kursuses). Pöördfunktsiooni mõiste käsitlemine koolis on uue ainekava korral problemaatiline. Seda ei oleks tarvis kitsas kursuses käsitleda, sest miks on siin tarvis õpilastel teada, et eksponent- ja logaritmfunktsioon on „sugulased“, pealegi rohkem selliseid funktsioone kitsas kursuses ei ole. Kuidas sellisel juhul kujundada õpilastes ettekujutus logaritmfunktsiooni graafikust ja omadustest, tuleb juttu käesoleva artikli ainekäsitlust puudutavas osas. Selle seisukoha õigsust kinnitab ka ainekava juures olev õppeaine kirjeldus (artikkel 2.1.2.). Veelgi enam: ka laias kursuses ei ole pöördfunktsiooni mõistet tarvis, sest enam ei esine ainekavas arkusfunktsioone, on vaid mõisted arcsin m, arccos m ja arctan m. Samuti puudub ainekavast teema „Pöördfunktsiooni tuletis“. Et ainekavas on säilinud liitfunktsiooni tuletis, saab selle abil võrdlemisi lühidalt leida eksponentfunktsiooni tuletist logaritmfunktsiooni tuletise kaudu. Ka sellest pikemalt ainet käsitlevas osas.

Üldpädevuste kujundamine

Väärtuspädevuste kujunemisele on matemaatikas hea kaasa aidata liitprotsendilise kasvamise ja kahanemise käsitlemisel, sest ülesannetes kirjeldatavad eluvaldkonnad on väga mitmekesised. Siin saab leida erinevate rahvaste ja riikide elanikkonna juurdekasvu, võrrelda seda absoluutarvudes või protsentides; uurida rahvastiku muutumist Eestis alates Eesti riigi tekkest tänapäevani; selgitada mikroobide paljunemise kiirust ja siit tulenevaid probleeme; uurida metsa juurdekasvu ja raiet (ka erinevate puuliikide kaupa) Eestis; selgitada radioaktiivsete ainete lagunemise kiirust; rahasumma kasvamist pangas erinevate hoiuseliikide korral; ostetud uue auto väärtuse langemist aja jooksul ning – kõike seda ka vastavalt väärtustada. Mitmeid kõnealuseid protsesse ja veel mitmeid teisi, näiteks mõningate haiguste ja taudide kulgu, saab kirjeldada eksponentfunktsioonide abil. Vajalik on ka vastavat mõttevahetust arendada ning jälle väärtushinnanguid kujundada..

Sotsiaalse pädevuse kujundamine toimub tegelikult sama temaatika käsitlemisel, millest oli juttu väärtuspädevuste juures. Ei ole ju võimalik olematute väärtushinnangute korral omada teatud vastutustunnet isikliku tegevuse suhtes ühiskonna ja kaaskodanike ees.

Enesemääratluspädevusest rääkides peetakse tavaliselt silmas adekvaatset enesehinnangut oma võimetele, töökusele, saavutustele. Kuid enesemääratluspädevuse kujundamine tähendab ka oskust oma väärtushinnanguid võrrelda teiste inimeste väärtushinnangutega ja arutlust selle üle, mis on õige ja mis mitte, ning valmisolekut oma hinnanguid muuta. Kõike seda tuleks püüda õpilastes kujundada – miks mitte seoses väärtus- ja sotsiaalse pädevusega. Matemaatilistest teemadest sobivad selleks lisaks eelnimetatutele ka arvu logaritmi mõistega seotud teoreemid ja valemid, sest just nende kasutamisel on võimalik konstrueerida vastavaid mudeleid (funktsioone) auto pidurdusteekonna pikkuse ja kiiruse, kuuma supi temperatuuri ja jahtumisaja, kasvava pärmi koguse ja aja, kasvava puidu koguse ja kasvupinnase kaldenurga, kalade kaalu ja pikkuse jne kohta.

Õpipädevuse osas areneb eelmistes lõikudes nimetatud teemade ja eluliste ülesannete lahendamisel koostatud mudelite abil nähtuste uurimis- ning analüüsimisoskus. See arendab omakorda õpilaste iseseisva mõtlemise ja arutlemise oskust. Sama teeb koostatava matemaatilise mudeli (funktsiooni) parameetrite leidmise kavandamine ja praktiline leidmine. Vähetähtis ei ole selline tegevus ka leidlikkuse arendamisel.

Suhtluspädevus kujuneb ikka siis, kui klassis tekib arutelu lahendatavas ülesandes kirjeldatud probleemi või nähtuse üle. Samavõrd olulised on kaalutlused ülesande lahendamise matemaatilise külje, näiteks võrrandisüsteemi parima lahendusviisi leidmise suhtes. Aruteluga lähevad tavalisalt kaasa aktiivsemad, julgemad ja aines tugevamad õpilased. Et ka ülejäänutel areneks suhtlusoskus ja tekiks julgus oma arvamust öelda, peaks õpetaja leidma neile jõukohast materjali ja aega, et nad saaksid tahvli juures selgitada ülesande lahendust või mingit teoreetilist pala.

Läbitavate teemade käsitlemine

Teema „Elukestev õpe ja karjääriplaneerimine“ haakub hästi eksponentfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni käsitlemisega. Siin kohtab ülesandeid väga erinevatelt elualadelt ja nende lahendamine peaks automaatselt viima mõttele, et küll ikka matemaatikat läheb reaalsuses palju tarvis ja isegi seal, kus seda ei oska oodatagi, näiteks meditsiinis. Järelikult peab matemaatikat korralikult õppima, et mitte olla elukutse valikul hädas. Kui edasistes õpingutes vältida matemaatikat, jääb eriala valik kitsaks. Kui lisaks ka keeled ei istu või ei meeldi, on valik juba väga kitsas. Aga kogu see mõttemõlgutus puudutab ju pidevat õppimist koolis, mis, muutudes harjumuseks, tagab ka õppimisvõime ja õpioskuse edaspidiseks. Samas on kõik see ka eelduste loomine tulevaseks karjääriks.

Teema „ Keskkond ja jätkusuutlik areng“ on sisuliselt üht eluvaldkonda kirjeldav, uuriv ja arendav temaatika, mis matemaatikast vajab lisaks muule mitmesuguseid funktsioone kui nähtuste ja protsesside mudeleid. Sellekohase näitena on allakirjutanu poolt koostatud paar ülesannet Ü. Manderi artiklist „Autoteed saastekolletena“, „Eesti Loodus“ 1985 nr. 5 lk 311 leitud funktsiooni kohta, mis sisaldab omakorda eksponent- ja juurfunktsiooni. Ülesanded on järgmised.

1.*Teise maailmasõja lõpust peaaegu sajandivahetuseni sõideti Eestimaa teedel pliid sisaldava bensiiniga. Teeäärse maapinna saastamist pliiga (milligrammi ruutmeetri kohta aastas) arvutatakse valemi järgi*

$C = 0{,}012 \cdot A \cdot e^{-0{,}11k} + 0{,}37\sqrt[3]{A}$,

kus A on liiklustihedus (liiklusvahendite arv) ööpäevas ja k on kaugus meetrites teeservast. Konstrueerige suuruste C ja k vahelise sõltuvuse graafikud teede kohta, kus liikus ööpäevas 1000 liiklusvahendit ja kus 3000 liiklusvahendit (Eestis oli selliseid teid 1980ndatel aastatel

umbes 2200 km). Lugege ohutu saastatuse piiriks 10 mg/m^2 pliid aastas. Kui kaugel tee servast algas ohutu piirkond kummagi liiklustiheduse korral? *Mitmekordselt ületas kummalgi juhul saastatus lubatud normi teepeenral*?

2. *Konstrueerige eelmise ülesande andmetel suuruste A ja C vahelise sõltuvuse graafikud, kui* 1) *k = 0 m ja 2) k = 10 m. Millise liiklustiheduse korral ületas saastatus lubatud piiri 10 mg/m^2 teepeenral ja teest 10 meetri kaugusel? Andke vastus 100 auto täpsusega. Kui ööpäevas läbis üle 3000 auto, soovitati jätta tee äärde 20 m laiune puhvertsoon, kus ei kasvatataks põllukultuure. Kontrollige arvutuslikul teel, kas sellise laiusega puhvertsoonist piisab.*

Ülesanded sobivad antud kujul lahendamiseks laia matemaatikakursuse korral ja muudetud kujul kitsa kursuse korral, pakkudes oma temaatikaga palju kõneainet keskkonnakaitse seisukohalt. Lahendanud ülesanded, peaks olema ka selge, miks kasutatakse kaasajal vaid pliivaba bensiini. Plii ohtlikkusele viitab puhvertsooni jätmise vajadus teatud juhtudel, sest põllukultuuride kaudu jõuaks plii ka loomade ja inimese organismi. Ülesannete lahendamisel võib lasta graafikud joonistada arvutil või loobuda graafikute kasutamisest. Sellisel juhul tuleb välja kirjutada fikseeritud *A* või vastavalt *k* korral funktsioonid ning lahendada ülesanne arutelu ning proovimise teel. Näiteks teise ülesande juhul $k = 0$ (teepeenra saastamine pliiga) saab saastefunktsioon kuju $C = 0{,}012 \cdot A + 0{,}37\sqrt[3]{A}$, millest tuleb leida *A* nii, et *oleks* $C \approx 10$. Esialgu võiks hinnata argumendi *A* suurust liidetava 0,012 *A* järgi. Siit järeldub, et ilmselt on $A < 1000$. Mõne proovimise järel jõutakse vastuseni 600 autot ööpäevas. Tegelikult on liiklustihedus paremini tajutav, kui öelda, et sõita tohib keskmiselt 2 autot 5 minuti jooksul, mis annab 576 autot ööpäevas. Nüüd võiks ka arvutada saaste oletatava suuruse aastas 576 auto korral. Head kõneainet pakub nende ülesannete korral isegi õpetajapoolne küsimus, miks lubatakse vastuses autode arvu anda 100 auto täpsusega. Esiteks ei ole sellisel juhul vea ülempiir 100 vaid $\pm$ 50, teiseks sisaldasid erinevat marki bensiinid erinevas koguses pliid jne. Nii ülesandeid muutes võibki need teha ka kitsa matemaatikakursuse järgi õppijatele jõukohaseks.

Teema „Tehnoloogia ja innovatsioon“ käib pealkirjas märgitud teemas mudelite (funktsioonide) koostamise etteantud empiiriliste andmete järgi. Toome näite.

Ahvenaid püüdes ja mõõtes saadi järgmised arvupaarid, kus esimene arv näitab kala pikkust (cm) ja teine kala kaalu (g): (6; 13), (10; 25), (14; 75), (18; 137), (22; 225), (26; 375), (30; 510). Koostage nende andmete põhjal funktsiooni avaldis, mis kirjeldab ahvena pikkuse

ja kaalu seost. Sobiva funktsiooni valikuks joonistage vastav graafik. Leidke saadud funktsiooni abil ahvena oletatav kaal, kui pikkus on 15 cm, 27 cm.

Tavaliselt on ülesandes öeldud, millisel kujul vastavat mudelit otsida. Siin antakse selleks vaid idee. Realiseerinud selle, ei ole ikka lihtne funktsiooni kuju valida. Nüüd peab õpilane püstitama hüpoteesi ja valima ilmselt kahe funktsiooni vahel, kas astmefunktsioon kujul $y = ax^2$ või kujul $y = ax^n$, kus $x > 6$ või siis eksponentfunktsioon kujul $y = ca^x$, $y = ca^{bx}$ või koguni kujul $y = ce^x$, kus $x > 6$. Valik on seda lihtsam, mida paremini tuntakse funktsioonide graafikuid ja nende omadusi. Et välja tuleks võimalikult hästi antud andmeid peegeldav funktsioon, tuleb lisaks funktsioonile valida antud andmetest just sellele funktsioonile iseloomulikud punktid. Nii ei sobi tavaliselt näiteks kaks või kolm, sõltuvalt parameetrite arvust võetud funktsioonis, esimest järjestikust punkti. Hea oleks, kui arvestada saab näiteks ahvena võimalikku pikkust kogu ulatuses. Valitud funktsiooni sobivus ilmneb alles siis, kui saadud funktsiooni abil arvutada nendele kala pikkustele vastavad kaalud, mida ei kasutatud funktsiooni avaldise koostamisel, ja võrrelda saadud tulemusi algandmetega. Selline tegevus arendab õpilase leidlikkust, algatusvõimet, kriitilist meelt (milliseid algandmeid kasutada parameetrite leidmisel, kuidas ma aru saan, kas funktsiooni valik on hea või halb), täpsust (graafiku joonistamisel) jne. Arvuti, ka nn graafilise taskuarvuti abil (mille kasutamine eksamil on keelatud), saab võrrelda empiiriliste andmete põhjal koostatud graafikut ja saadud funktsiooni graafikut.

Teema „Tervis ja ohutus“ käsitlus saab toimuda ikka vastava temaatika, näiteks haiguste ja taudide kulgemist kirjeldavate andmete või valmis mudeleid sisaldavate ülesannete lahendamise kaudu.

Aine käsitlemine

Enne eksponentfunktsiooni käsitlemist on otstarbekas korrata arvuhulki ja nende nimetusi. Tarvis on ka meelde tuletada, kuidas avaldub ratsionaalarv, kuidas irratsionaalarv ja reaalarvud. Varasemast teavad õpilased, mis on arvu ratsionaalarvuline aste ja kuidas seda leida. Irratsionaalarvulise astendajaga astme mõistet nad veel ei tunne. Seega tekib nende jaoks olukord, et funktsiooni $y = 2{,}05^x$ graafikusse tekib näiteks $x = \sqrt{5}$ kohal „auk“, sest ametlikult funktsiooni väärtuse $2{,}05^{\sqrt{5}}$ tähendust õpilased ei tunne ja leida ei oska. Järelikult tuleks nii kitsas kui ka laias kursuses esmalt korrata astme a^x mõistet, kui $x \in \mathbf{Q}$, st kui $x =$

$\frac{m}{n}$, kus $n \in \mathbf{Z}^+$ ja $m \in \mathbf{Z}$, kui a > 0 või $n \in \mathbf{Z}^+$ ja $m \in \mathbf{Z}^+$, kui $a = 0$, ja seejärel laiendada seda juhule, kus x on irratsionaalarv. Nii saab a^x tähenduse kõigi reaalarvuliste x väärtuste korral ning funktsiooni $y = a^x$ graafiku konstrueerimisel probleeme „aukudest“ ei teki. Laia kursuse korral on kasulik arvu astmete käsitlemisel anda ka järgnev teoreem, mis on hiljem abiks eksponentfunktsiooni omaduste vaatlemisel ja eksponentvõrratuste lahendamisel:

Kui $0 < a < 1$, *siis* $a^{r_1} > a^{r_2} \Leftrightarrow r_1 < r_2$; *kui* $a > 1$, *siis* $a^{r_1} < a^{r_2} \Leftrightarrow r_1 < r_2$.

Selgeks peaks saama nii laia kui ka kitsa kursuse järgi õppijatele arvu astme a^x leidmine taskuarvutil igasuguse astendaja x korral. Seejuures on õpetamisel raskuseks erinevat marki taskuarvutite olemasolu õpilastel. Isegi astendamisklahvi x^y korral võib olla erinevat marki arvutitel näiteks 2^3 leidmine erinev. Kord tuleb sisestada esmalt astendatav 2 (nii on enamikel arvutitel) ja siis astendaja 3, kord aga vastupidi. Parim viis õige variandi leidmiseks on sellisel juhul ikka katse-eksituse meetod. Variant, mis annab õige tulemuse, ongi selle arvuti korral sobiv a^x leidmiseks. Analoogiliselt tuleks katsetada, kas $27^{\frac{2}{3}}$ tuleb arvutada vajutuste jadaga 27 x^y (2 : 3) = või saab seda teha ka vajutustega 27 x^y 2 : 3 =. Mõnedel arvutitel annab astendamiskäsu klahv sümboliga $\wedge$, seejärel tuleb sisestada astendaja ja lõpuks vajutada klahvi = või Enter.

Nagu eespool selgitasime, on nüüd mõlema kursuse raames otstarbekas käsitleda just liitprotsendilist kasvamist ja kahanemist, mis pakub väga mitmekesise temaatikaga elulisi ülesandeid ja viib diskreetse määramispiirkonnaga funktsioonile $y = ca^x$, *kus* $0 < a < 1$ või $a > 1$ ning $x \in \mathbf{N}$. Laiendades määramispiirkonda reaalarvude hulgale, saamegi eksponent-funktsiooni üldkujul $y = ca^x$, *kus* $0 < a < 1$ või $a > 1$ ning $x \in \mathbf{R}$.

Defineerinud eksponentfunktsioonilt tuleb jõuda selle graafikuni. Üks võimalus on näidata graafikut ja kindlasti erinevates teljestikes: juhud $0 < a < 1$ ning $a > 1$. Nüüd järgneks funktsiooni ja selle graafiku omaduste selgitamine. Nii võiks teha kitsa kursuse järgi õpetades. Parem oleks laia (ja isegi kitsa) kursuse korral selgitada esmalt funktsiooni omadusi definitsioonist lähtudes. Selle tulemusena tekib igal õpilasel mingi ettekujutus graafikust ja alles seejärel esitada graafik korrektsel kujul. Funktsiooni omaduste tuletamine definitsioonist on õpilastele arendav, lubades neil teha oma oletusi ja järeldusi, neid esitada ning kaitsta. Eksponentfunktsioon võimaldab lahendada jälle ülesandeid, mis on mitmesuguse temaatikaga erinevatelt elualadelt. Erilist tähelepanu võiks seejuures pöörata funktsioonile $y = ae^{bx}$, sest

just selle abil kirjeldatakse paljusid protsesse ja nähtusi loodusest, tervishoiust, majandusest jm. Nii näiteks esitus eespool kirjeldatud saastefunktsioon eksponentfunktsioonina, kui liiklustihedust näitav parameeter *A* oli fikseeritud. Õhurõhk P (mm elavhõbedasammast) sõltub merepinnast mõõdetud kõrgusest h (meetrit) kujul $P = 760 \cdot e^{-0{,}000125\ h}$, teatud bakterite massi y_0 (grammides) juurdekasvu aja t (tundides) jooksul kirjeldab seos $y = y_0 \cdot e^{0{,}4165\ t}$, kus *y* on bakterite mass aja t pärast. Ehituskunsti ja tehnika, kuid ka iluasjade juurde viib funktsioon

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

mille graafikuks on niinimetatud aheljoon: raske kahest punktist kinnitatud ahel (ka raske kaelakee). Aheljoone erinevus paraboolist $y = x^2 + 1$ ilmneb nende joonestamisel samasse koordinaatteljestikku. Ahela „harud“ on rasked keti massiivsuse tõttu ja püüavad seetõttu rippuda võimalikult vertikaalselt. Selle tagajärjel tirivad „harud“ ka tipu juures asuva nõgusa osa sirgemaks, laugjamaks, kui see on nimetatud paraboolil. Kerge „ahel“, näiteks peenike kuldkett, võtab rohkem parabooli kuju. Ka raske ahela kuju peeti mitmete matemaatikute poolt parabooliks. Aheljoon vääriks väikest ettekannet koos illustratsioonidega. Arvu e tähtsust rõhutab seegi, et pideva juhusliku suuruse normaaljaotuse tõenäosusfunktsioon avaldub eksponentfunktsioonina

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-E(x))^2}{2\sigma^2}},$$

kus *E(x)* on juhusliku suuruse keskväärtus ja σ standardhälve. Samas kirjeldatakse paljusid loodus- ja ühiskonnanähtusi just normaaljaotuse abil. Näiteks vahtrapuu lehtede jaotumist lehtede pindala järgi, 18-aastaste neidude jaotumist pikkuse järgi, arvatavasti ka 16-aastaste poiste jaotumist kuus ära söödavate kommide hulga järgi jne. Kõik sellised ülesanded rõhutavad ka arvu e tähtsust nii matemaatikas kui ka paljude nähtuste kirjeldamisel, mistõttu peaks õpilastes kujunema arusaam, et arv e on vähemalt sama tähtis arv kui π. Seda näitab ka asjaolu, et taskuarvutil on lisaks kümnendlogaritmi klahvile veel naturaallogaritmi klahv, logaritmi $y = \ln x$ nimetusest – naturaallogaritm ehk loomulik logaritm – rääkimata.

Arvu logaritmi mõistet ning sellega seotud teisi mõisteid ja valemeid on koolis tarvis käsitleda. Sellest oli juttu juba eespool. Arvu logaritmi mõiste võib anda formaalselt ja siis selgitada seost astendamisega. Paremaks peetakse aga eelnevat tehte ja pöördtehte meenutamist. Liitmisel ja korrutamisel on üks pöördtehe: vastavalt lahutamine ja jagamine.

Astendamisel $m^n = r$ (kus $m > 0$, sest vastasel juhul võib sattuda negatiivne arv m näiteks ruutjuure märgi alla) on aga kaks pöördtehet: 1) juurimine, kui teada on astme väärtus r ja astendaja n, leitakse tehte komponendi m juurimise teel, $m = \sqrt[n]{r}$; 2) kui aga teada on suurused r ja m, saadakse astendaja n uue tehte/operatsiooni, logaritmimise teel, $n = \log_m r$. Nii jõutaksegi arvu logaritmi mõisteni. Ei ole kahtlust, et sümbol $\log_m r$ ja kirjutis $\log_m r = n$ on paljudele õpilastele esialgu mittetajutavad. Asi vajab harjumist. Selle kiirendamiseks ja kergendamiseks on mõistlik õpilane suunata mitte veel mõistetavalt võrduselt $\log_m r = n$ juba omasele võrdusele $m^n = r$. Kui arvu logaritmi käsitlev osa on läbitud, võiks õpetaja rääkida logaritmide tekke ajaloost ning eriti nende kasutamisest arvutusvahendina. Mõeldav on ka vastav ettekanne õpilastelt. Seejuures ei tasuks (vähemalt kitsa kursuse korral mitte) tutvustada arvu logaritmi karakteristikut ja mantissi kui mõisteid arvu logaritmi leidmiseks. Piisab teadmisest, et logaritmid leiti vastavate tabelite abil. Soovitav on seejuures tuua näiteid, kuidas töömahukate arvutusülesannete korral toimiti. Nii kinnistuvad ka paremini valemid korrutise, jagatise ja astme logaritmi kohta. Valemite mehhaanilisteks mudeliteks olid juba 17. sajandi esimeses pooles konstrueeritud joonlauakujulised arvutuslükatid, hiljem tulid ringikujulised lükatid. Loomulik oleks, et õpilased saavad ka lükateid näha ning katsuda.

Logaritmfunktsiooni käsitlemine kitsa kursuse korral võiks toimuda ilma pöördfunktsiooni mõistet tundmata. Sellest oli juttu ka artikli sissejuhatavas lõigus. Võiks lähtuda võrdusest $r = \log_a N$ või kohe võrdusest kujul $y = \log_a x$. Vaadeldes logaritmitavat muutujana, on ka logaritmi väärtus, vastavalt r või y, muutuja, kusjuures muutuja x igale võimalikule väärtusele vastab ainult üks logaritmi väärtus. Järelikult defineerib seos $y = \log_a x$ funktsiooni, mida nimetatakse logaritmfunktsiooniks. Et ka nüüd $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, saame eksponentfunktsiooni omaduste põhjal teha järeldusi logaritmfunktsiooni kohta. Eksponentfunktsiooni korral oli astmealuse a kohta nõuded $0 < a < 1$ või $1 < a$. Et seos $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ võrduste vahel jääks kehtima, peab ka logaritmfunktsiooni korral olema $0 < a < 1$ või $1 < a$. Järelikult ka $x > 0$ ehk logaritmfunktsiooni määramispiirkond X = $\mathbf{Z}^+$**.** Siit tuleneb, et logaritmfunktsiooni graafik asub paremal pool y-teljest. Leiame näitena logaritmfunktsiooni omaduse, mis esitab positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna, kui $0 < a < 1$. Aruteluks kasutame võrduse $y = \log_a x$ asemel võrdust $a^y = x$. Positiivsuspiirkonnas on $y > 0$. Et a on ühest väiksem positiivne murdarv, siis seda astendades positiivse arvuga saame ühest väiksema positiivse arvu, st $0 < a^y < 1$ ehk $0 < x < 1$. Lühemalt: $X^+ = (0; 1)$. Negatiivsuspiirkonna korral on $y < 0$, järelikult on $a^y > 1$, millest $x > 1$ ning $X^- = (1; \infty)$.

Logaritmfunktsiooni tuletis leitakse tavaliselt tuletise definitsiooni kasutades. Kuna ainekava ei näe (õnneks) ette pöördfunktsiooni tuletise käsitlemist ka laia kursuse korral mitte, saab seda teha liitfunktsiooni tuletise valemi abil. Selleks kirjutame funktsiooni $y = a^x$ kujul $\log_a y = x$, kus vasakul pool on liitfunktsioon, sest seal esinev muutuja y on ise funktsioon $y = a^x$, paremal on aga (eksponentfunktsiooni) argument. Leidnud võrduse vasakust ja paremast poolest tuletise saame võrduse $\frac{1}{y \ln a} \cdot y' = 1$, millest $y' = y \ln a$. Et $y = a^x$, siis $y' = a^x \ln a$. Seega tõesti ei ole uue ainekava korral vajadust pöördfunktsiooni järele ei kitsas ega ka laias kursuses.