Kuidas korraldada kohustuslike kursuste õpetamist koos valikkursustega

Elts Abel, Tartu Ülikool

Aastast 2011 rakenduv gümnaasiumi uus riiklik õppekava koos ainevaldkondade kohustuslike ja valikkursustega pakub väga palju võimalusi õpilase võimete maksimaalseks arenguks ning tema eripäradest ja isiklikest huvidest tulenevate haridusvajaduste rahuldamiseks. Mil määral need võimalused aga realiseeruvad, sõltub oluliselt konkreetse kooli õppesuundade valikust ja vastavalt koostatud ainekavadest, kooli materiaalsete ja inimressursside olemasolust ning loomulikult ka õpilasest endast. Riikliku õppekava poolt seatud piirangud loomingulisele lähenemisele koolide õppe- ja ainekavade loomisel on mõistlikud. Õpilase minimaalseks õppekoormuseks gümnaasiumis on loetud 96 kursust (1 kursus on 35 õppetundi), millest üldjuhul kas 63 või 69 kursust moodustavad riiklikus õppekavas loetletud ainevaldkondade õppeainete kohustuslikud kursused – sõltuvalt sellest, kas on valitud kitsas või lai matemaatika. Lähtuvalt kooli õppekeelest, võib kursuste ülalnimetatud arvudele lisanduda ka 9 kohustuslikku kursust eesti keelt võõrkeelena. Valikkursused võivad olla nii riiklikus õppekavas valdkonniti kirjeldatud valikkursused kui ka kooli õppekavast tulenevad või koguni muudes haridusasutustes loodud kursused. Õppesuuna sees võib kool teha kohustuslikuks kuni 20 valikkursuse õppe, kui kursusel osaleb vähemalt 12 õpilast. Arvestades piirkondlikku eripära või kooli omapära, võib iga õppeaine kursusi siduda omavahel (sh kohustuslikke ja valikkursusi), läbida valikkursusi ka teistes Eesti õppeasutustes ja huvikoolides, kasutades vajadusel Eesti ja/või rahvusvahelisi võrgustikke ning infotehnoloogilisi lahendusi, kui tagatakse sealjuures aga riikliku õppekavaga seatud eesmärkide täitmine (GRÕK, 2011).

Ainevaldkonnas „*Matemaatika*“ näeb gümnaasiumi uus riiklik õppekava ette kaks võimalikku suunda: *kitsas matemaatika* (8 kohustuslikku kursust) või *lai matemaatika* (14 kohustuslikku kursust). Ükskõik kumma suuna valinutel ei ole mingit kohustust võtta lisaks kohustuslikele kursustele ka valikkursusi matemaatikas, kui kooli õppekava seda ette ei näe. Samas öeldakse gümnaasiumi riiklikus õppekavas, et „*Laia matemaatika kava ei rahulda matemaatika süvaõppe vajadusi. Matemaatikast enam huvitatud õpilastel on võimalik kasutada valikainete õpiaega, üleriigilisi süvaõppevorme ja individuaalõpet*“ (GRÕK, 2011, lisa 3, lk 2).

Kuidas aga toimida, kui on vajadus ja/või soov võtta valikkursusi matemaatikas? Õpilane saab ilmselt valida vaid nende valikkursuste vahel, mille ainekava on mingi haridusasutuse

õppekavas juba olemas. Õpetajal tuleks enne lõpliku valiku tegemist leida vastuseid mitmele üleskerkivale küsimusele.

Millist valikkursust on vaja?

Valikkursuse teema ja sisu valikul lähtub kool/õpetaja ilmselt nii riikliku kui ka kooli õppekava üldistest ja ainealastest taotlustest ning arvestab oma kooli eripära ja võimalusel ka õpilaste soove. Esmalt tuleks väga hästi läbi mõelda ja selgelt püstitada valikkursuse õppe- ja kasvatuseesmärgid. Siinjuures võib teha rõhuasetusi just nendele eesmärkidele, mille saavutamiseks kohustuslike kursuste raames jääb aega napiks. Just valikkursuste kaudu saame anda parema ettekujutuse matemaatika ajaloolisest arengust ja selle tähendusest ühiskonna arengus, matemaatika rakendustest igapäevaelus ja teistes teadusvaldkondades, pakkuda enam avastamisrõõmu ja huvitavat tegevust, süstematiseerida ja süvendada erialaseid teadmisi või pöörata hoopis rohkem tähelepanu avastusõppele ning tõestamisele ja põhjendamisele. Et aega jääks ka diskussioonidele ja esitlustele, võiks gümnaasiumis valikkursusi tunniplaani planeerida paaristundidena. Valikkursuste täitmisel sisuga saab enam arvestada nii õpetajate kui ka õpilaste huvide ja võimetega.

Kust leida sobivat valikkursust?

Kitsa matemaatika suuna valinutele on antud valikuvõimalusi rohkem, sest neil soovitatakse oma kohustuslikele kursustele lisada valikkursustena esmajoones laia matemaatika ainekava kohustuslikke kursusi (Pihlap, 2010). See on üks kergemaid mooduseid, sest õppekirjandus on õpikute näol ju põhiliselt olemas. Suunast sõltumata võib kooli ja/või õpilase huvidest ja iseärasustest ning püstitatud eesmärkidest lähtuvalt valikkursuse muidugi koostada aineõpetaja ise, leida selle matemaatika ainekavast seal esitatud 8 valikkursuse seast või siis asendada selle mõnes teises haridusasutuses või huvikoolis läbitud kursusega.

Uues gümnaasiumi matemaatika ainekavas on kirjeldatud kaheksa võimaliku valikkursuse – „*Loogika*", „*Majandusmatemaatika elemendid*", „*Arvuteooria elemendid* I", „*Arvuteooria elemendid* II", „*Diskreetse matemaatika elemendid* I", „*Diskreetse matemaatika elemendid* II", „*Planimeetria* I. *K*olmnurkade ja ringide geomeetria" ning „Planimeetria II. Hulknurkade ja ringide geomeetria" – õppesisu, õppe-eesmärke ja õpitulemusi **(**GRÕK, 2011, lisa 3**).** Kõik loetletud 8 valikkursust mitte ainult ei süvenda kohustuslikes kursustes omandatud põhiteadmisi, vaid annavad ka uusi teadmisi ja oskusi.

Loetletud kursustest vaid üks – „*Majandusmatemaatika elemendid*" – käsitleb matemaatiliste meetodite rakendamist teistes eluvaldkondades. Euroopa Sotsiaalfondist rahastatava projekti *TeaMe* toel on loodud Tallinna Ülikooli ja Tallinna Tehnikaülikooli õppejõududest ning gümnaasiumi õpetajatest töörühm, kes on asunud koostama õppematerjale selle kursuse jaoks 12. klassile. Lõplikud materjalid peaksid valmima 2013. aasta maiks ja siis on need kõikidele õpetajatele kättesaadavad nii interneti vahendusel kui ka paberkandjal. Seniks võib selle valikkursuse alusmaterjalina kasutada näiteks J. Afanasjevi koostatud ja nimetatud kursusega samanimelist raamatut (Afanasjev, 2001). Ülejäänud 7 valikkursust on mõeldud peamiselt selliste matemaatikapädevuste oluliste komponentide nagu matemaatiliste mõistete ja seoste süsteemse tundmise ning loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamisoskuse saavutamiseks ning on igati sobivad ka süvaõppeks matemaatikas. Uus õppekava seab ju ühesuguseid ja üsna kõrgeid nõudmisi gümnaasiumi lõpetajale, sõltumata sellest, kas on valitud kitsa või laia matemaatika suund. Näiteks: „*Gümnaasiumi lõpetaja püstitab matemaatilisi hüpoteese, põhjendab ja tõestab neid*" (GRÕK, 2011, lisa 3, lk 1). Samas kohtab kohustuslike kursuste õpitulemuste loetelus vaid mõnel üksikul korral selliseid sõnu nagu „*põhjendab*" või „*tõestab*". Ainekava jätab tõestamisega tegelemise määra paraku täpsustamata ning õpetaja otsustada. Uue ainekava autorid on õpilastelt selles osas oodatavad pädevused jätnud konkretiseerimata. Põhikoolis (loodetavasti) omandatud algteadmistest mõistete defineerimisel ja nõutavatest tõestamise esmastest oskustest ilmselt ei piisa uues gümnaasiumi õppekavas rõhutamist leidnud pädevuse saavutamiseks. Paraku puudub ka gümnaasiumis kohustuslike kursuste loetelus selline kursus, kust võiks leida materjali matemaatilise tõestamise olemuse mõistmiseks ja selle oskuse nõutud tasemel kujundamiseks. Millise õppematerjali baasil siis saaks harjutada hüpoteeside püstitamist, põhjendamist ja tõestamist? Seda lünka võib täita näiteks valikkursus „*Loogika*", millega võiks alata juba 10. klassis. Ka teistest ainekavas olevatest valikkursustest leiab hulgaliselt ideid nimetatud pädevuste arendamiseks. Arvuteooria, geomeetria ja diskreetse matemaatika kuue valikkursuse õppekirjanduse koostamiseks on samuti moodustatud töörühm Tartu Ülikooli õppejõududest ning Teaduskooli metoodikutest. Kaks raamatukest (*Arvuteooria* I ja *Diskreetne matemaatika* I) peaksid valmima 2012. aasta septembriks, ülejäänud neli aga kahekaupa kahe järgmise õppeaasta alguseks. Nimetatud kuus valikkursust sisaldavad ka mõningaid teadmisi, mida on vaja ülesannete lahendamiseks nii kohalikel matemaatikaolümpiaadidel kui ka rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel. Seetõttu leiab nende kursuste tarvis sobilikku õppematerjali TÜ Teaduskooli ja matemaatikaolümpiaadide

kodulehtedelt. Nii mitmedki TÜ Teaduskooli poolt pakutud kursused võiksid sobida valikkursusteks, mida õpilane läbib individuaalkorras, koolist sõltumatult.

Juba on planeerimisel ka täienduskursused õpetajatele, kes hakkavad õpetama valikkursusi.

Kuidas ühitada kohustuslike ja valikkursuste õpetamist?

Gümnaasiumi esimene kohustuslik kursus 10. klassis nii kitsa kui laia matemaatika korral sisaldab alateemat „*Arvuhulgad*“, milles õpitakse eristama ratsionaal-, irratsionaal- ja reaalarve ning tundma nende põhiomadusi. Naturaal- ja täisarvudele pööratakse siin vähe tähelepanu. Laia matemaatika suuna korral tuleks ainekava kohaselt vaadelda arvude kümnendesitusele lisaks ka arvude esitamist kahendsüsteemis. Vaadeldava teema laienduseks sobiksid väga hästi kas üks valikkursustest „*Arvuteooria elemendid* I“ ja „*Arvuteooria elemendid* II“ tervikuna või nende kahe kursuse pealt mõnede põhivaldkondade alusel loodud uus ühendatud arvuteooria kursus. Kursustest esimene, mis tugineb põhikoolis õpitud mõistetele ja tutvustab mõningaid spetsiaalseid tõestusmeetodeid, sobib ka kitsa matemaatika suuna valinutele. Valikkursuse „*Arvuteooria elemendid* II“ edukaks läbimiseks on soovitav eelnevalt läbida valikkursus „*Arvuteooria elemendid* I“. Õpilased, kes on juba põhikoolis osalenud matemaatikavõistlustel ning omandanud esmased teadmised elementaarsest arvuteooriast, võiksid kaaluda kohe kursuse „*Arvuteooria elemendid* II“ valimist. Sellesse kursusesse on planeeritud ka matemaatika ühe vanima ja üldisema tõestusmeetodi nn *matemaatilise induktsiooni meetodi* tutvustamine ja rakendamine erinevat tüüpi ülesannete lahendamisel. Uues ainekavas matemaatika kohustuslikes kursustes selle meetodi käsitlemist enam ette nähtud ei ole. Nimetatud valikkursuste raamatutest leiab õpetaja ka huvitavaid lisamaterjale põhikursustele (näiteid eriliste omadustega täisarvudest, ainevaldkonnale omaseid tõestusvõtteid, ajaloolisi märkusi, viiteid matemaatika rakenduste kohta jne). Arvuteooria on üks vanemaid matemaatika valdkondi, kuid vaatamata sellele, ei ole isegi tänapäeva arvutite kaasabil suudetud lahendada mõningaid üsna lihtsalt ja arusaadavalt sõnastatavaid küsimusi. Samas on viimasel kümnel aastal arvutite abil loodud näiteks sadu uusi eriliste omadustega täisarvude jadasid, mis kõik on koondatud elektroonilisse andmebaasi OEIS, mis sisaldab üle 175000 täisarvude jada kirjet (Sloane).

Gümnaasiumiastme esimesel aastal pööratakse kohustuslikes matemaatikakursustes küllaltki suurt tähelepanu tekstülesannete lahendamiseks sobivate mudelite koostamisele. Peamiselt asetatakse siin põhirõhk just algebralistele mudelitele (võrrandid ja võrrandisüsteemid ning vähesemal määral ka võrratused). Tasakaalustama seda kallutatust algebraliste mudelite

suunas sobib näiteks valikkursus „*Diskreetse matemaatika elemendid* I“. Siin tutvustatakse mõningaid loogikaülesannete lahendamise tüüpvõtteid ning matemaatika üht üldisemat tõestusmeetodit – *Dirichlet' printsiipi*. Viimase populaarne sõnastus on lihtne ja arusaadav: „*Kui meil on n puuri, millesse on pandud n + 1 küülikut, siis leidub kindlasti üks puur, milles on vähemalt kaks küülikut*“. Dirichlet' printsiibi rakendamisel teatud liiki arvuteooria ja geomeetriaülesannete lahendamisel tulevad kasuks ka mõningad põhiteadmised nimetatud valdkondades põhikooli kursusest. Valikkursuses selgitatakse invariantide meetodi olemust, mille abil saab lahendada näiteks teatud mängudega seotud probleeme ning tutvustatakse ka värvimistega seotud ülesannete lihtsamaid lahendusvõtteid. Tänapäeval on diskreetne matemaatika kiiresti arenev ja oluline matemaatikavaldkond. Selle arengut on mõjutanud just arvutiteaduste vajadused.

Kooliõpilasele tuntuim valdkond diskreetsest matemaatikast on kombinatoorika, mille aluseid õpetatakse lühidalt kohustusliku kursuse „*Tõenäosusteooria ja statistika*“ raames kas 11. või 12. klassis. Neile, kes soovivad süveneda kombinatoorika saladustesse, sobib valikkursus „*Diskreetse matemaatika elemendid* II“. Siin vaadeldakse mitte ainult kordumisteta, vaid ka kordumistega permutatsioone, variatsioone ja kombinatsioone. Kuna tulemuste tõestamisel on tarvis matemaatilise induktsiooni printsiipi, siis käsitletakse seda ka selles valikkursuses. Nimetatud kursuse kolmas põhivaldkond viib õppuri graafiteooriasse, mille tulemusi rakendatakse tänapäeval näiteks mitmesuguste kommunikatsiooni- ja teedevõrkude loomisel. Kirjeldatud valikkursuse „*Diskreetse matemaatika elemendid* II“ võiks ainekavasse planeerida kas paralleelselt kohustusliku kursusega „*Tõenäosusteooria ja statistika*“ või pärast selle kursuse läbimist kas 11. või 12. klassis. Diskreetse matemaatika valikkursused on teineteisest sõltumatud, st üks neist ei eelda teise kursuse eelnevat läbimist.

Küllaltki suur osa gümnaasiumi ainekava kursustest (eriti laia matemaatika suunal) käsitleb funktsioone ja nende tuletistega seotud küsimusi. Oluliseks peetakse näiteid funktsioonide rakendamisest reaalse elu nähtuste modelleerimisel. Laia matemaatika ainekava viimane kursus lausa ongi pühendatud matemaatilisele modelleerimisele ning matemaatika rakendustele loodus- ning majandusteadustes, tehnoloogias ja mujal. Nimetatud kohustuslikele kursustele annab lõpuklassis kindlasti lisa valikkursus „*Majandusmatemaatika elemendid*“, millest oli põgusalt juttu juba eespool.

Matemaatika ainekava valikkursuste nimekirjas on ka kaks planimeetria küsimusi käsitlevat kursust „*Planimeetria. Kolmnurkade ja ringide geomeetria*“ ning „*Planimeetria* II.

Hulknurkade ja ringide geomeetria". Tasandiliste kujundite omadustele, ümbermõõtude ja pindalade arvutamisele on uues ainekavas leitud aega mõlemal suunal ka selles kohustuslikus kursuses, kus vaadeldakse funktsiooni integreerimisega seotud küsimusi. Vaatamata sellele, et nimetatud valikkursuste õppesisu kattub vähesel määral kohustusliku kursuse sisuga, on kursuste eesmärgid ja rõhuasetused ning ülesehitus siiski erinevad. Kui kohustuslik kursus enamasti kordab põhikoolis õpitud kujundite omadusi ja nende elementidevahelisi seoseid, mis on vajalikud stereomeetria kursuste läbimiseks, siis valikkursused tutvustavad üldisi ja erilisi sünteetilise geomeetria tõestusvõtteid ning laiendavad oluliselt teadmisi tasandiliste kujundite huvitavatest omadustest. Tasandilised kujundid pakuvad häid võimalusi piisavate ja tarvilike tingimuste vahekorra selgitamiseks. Näiteks üks vähestest tulemustest, mida teab (ja võib-olla on näinud ka selle tõestust) iga gümnaasiumi lõpetanu, on Pythagorase teoreem, mille võib esitada ka kujul: „*Täisnurkses kolmnurgas on kolmnurga külgede pikkused* a,b *ja* c *seotud võrdusega* $a^2+b^2=c^2$ *"*. Küsime aga nüüd nii:" *Kas sellest, et kolmnurga külgede pikkused* a,b *ja* c *on seotud võrdusega* $a^2+b^2=c^2$*, võime järeldada, et kolmnurk on täisnurkne?"* Nende ridade kirjutaja on oma pikkade tööaastate jooksul üliharva kohtunud selliste äsja kooli lõpetanutega, kes kahtleksid kiires jaatavas vastuses ülalesitatud küsimusele, kuid kes ütleksid, et Pythagorase teoreemist me seda küll kohe järeldada ei saa: peame tõestama Pythagorase pöördteoreemi. Planimeetria valikkursused annavad võimaluse selliste probleemidega tegeleda, kaasates uurimisprotsessi ka dünaamilise geomeetria arvuti-programme. Kursuses „*Planimeetria* II. *Hulknurkade ja ringide geomeetria*" harjutatakse klassikaliste konstruktsioonülesannete lahendamist ja korralike jooniste tegemist. See kursus tugineb teatud määral kursusele „*Planimeetria* I. *Kolmnurkade ja ringide geomeetria*". Geomeetria valikkursusi on soovitav valida enne stereomeetria kohustusliku kursuse läbimist.

Kui ka ülalpool vaadeldud valikkursusi ei lülitata oma kooli matemaatika ainekavasse, siis huvitavat materjali avastamiseks, kohustuslike kursuste täiendamiseks, ettekanneteks ja miks mitte ka lühikese uurimustöö koostamiseks leidub nende kursuste jaoks valmivatest õppematerjalidest küllaga.

Kirjandus

1. Afanasjev, J. (2001). Majandusmatemaatika elemendid. Tallinn: Avita.
2. Gümnaasiumi riiklik õppekava. Riigi Teataja I, 14.01.2011, 2.
3. Matemaatika olümpiaadide koduleht. URL http://www.math.olympiaadid.ut.ee

4. Pihlap, S. (2010, 22. jaan). Mis on muutunud matemaatika ainekavas? *Õpetajate Leht*. URL http://www.opleht.ee/?archive_mode=article&articleid=2773
5. Sloane, N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL http://www.research.att.com/~njas/sequences/
6. Tartu Ülikooli Teaduskooli koduleht. URL http://www.teaduskool.ut.ee