Funktsioonide õpetamisest IKT vahendite abil

Allar Veelmaa, Loo Keskkool

IKT vahendite kasutamist matemaatika õpetamisel gümnaasiumis käsitletakse käesoleva kogumiku artiklis „IKT vahendite kasutamisest gümnaasiumi matemaatikakursuste õpetamisel." Käesolevas artiklis vaadeldakse põhjalikult seda, kuidas võib kasutada IKT vahendeid funktsioonidega seotud teemade juures.

Miks eelistada arvutijoonist tahvlijoonisele?

Enne arvutite kooli jõudmist tehti kõik joonised kriidiga tahvlile. Kaasajal pole nii enam mõistlik toimida, sest tahvlijoonis on arvutijoonisest alati ebatäpsem, sellel puudub dünaamika ning tahvlijoonise tegemiseks kulub tarbetult palju aega. Paljudel juhtudel, kui visandatakse graafik (öeldakse ka, et skitseeritakse), kus oluline on graafiku kuju, mitte selle täpne väljanägemine, siis tasub eelistada tahvlile joonise tegemist (seda eriti siis, kui tegemist on mõne joonisega koolitunni jooksul). Arvutijoonise eelis seisneb ka selles, et seda saab korduvalt kasutada. Väited selle kohta, et arvutijoonise puhul tekib joonis justkui eimillestki, st kaob ära joonise valmimise protsess, ei pea paika. GeoGebraga saab joonist teha nii, et see tekitatakse ekraanile sammhaaval. Arvutiga jooniseid tehes saab ühte teljestikku lühikese aja jooksul teha mitu erinevat graafikut, tahvlijoonise puhul pole see üldjuhul võimalik.

Põhikoolis õpitud funktsioonide kordamine GeoGebra abil

Põhikoolis õpitakse joonestame lineaar- ja ruutfunktsiooni graafikut ning mingil määral kasutatakse ka pöördvõrdelise sõltuvuse graafikut. 11. klassis algab funktsioonide süsteemne käsitlus funktsiooni mõiste defineerimisega ning esimesed funktsioonid, mida põhjalikult uuritakse, ongi eespool nimetatud funktsioonid.

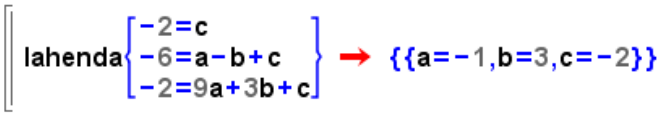
Põhikoolis joonestatakse sirge (võrrand $y = ax + b$) nii, et leitakse kahe sirgel asuva punkti koordinaadid ning joonestatakse neid läbiv sirge. Arvude a ja b geomeetrilist tähendust küll mainitakse, kuid tõusu ja algordinaadi järgi sirge joonestamine ei kuulu õpitulemuste hulka. Sirge võrrandi erinevate kujudega tegeletakse põhjalikult 10. klassis. Ruutfunktsiooni käsitletakse erinevates põhikooli õpikutes erineva sügavusega, 11. klassi jõudnud õpilaselt eeldatakse, et ta oskab leida funktsiooni nullkohti ning haripunkti koordinaate. Kindlasti peab oskama ka määrata, kas mingi punkt paikneb paraboolil või mitte. Kui 10. klassis õpitakse selgeks sirge võrrandi koostamine kahe punkti järgi, siis nüüd tekib küsimus: kas parabooli üheseks määramiseks on vaja kahte või kolme punkti? Kas mis tahes kolm punkti määravad parabooli? Selle ülesande lahendamiseks kasutame programmi GeoGebra ning 10. klassis õpitud võtteid lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks.

Näide 1. Kas punktid $A(1; 2)$, $B(2; 3)$ ja $C(3; 4)$ saavad asuda ühel paraboolil?
Kandes punktid A, B ja C koordinaatteljestikku näeme, et tegemist on ühel sirgel asuvate punktidega (vektorid $\overrightarrow{AB} = (1;1)$ ja $\overrightarrow{AC} = (2;2)$ on kollineaarsed). Seega punktid A, B ja C ei saa olla ühe parabooli punktideks.

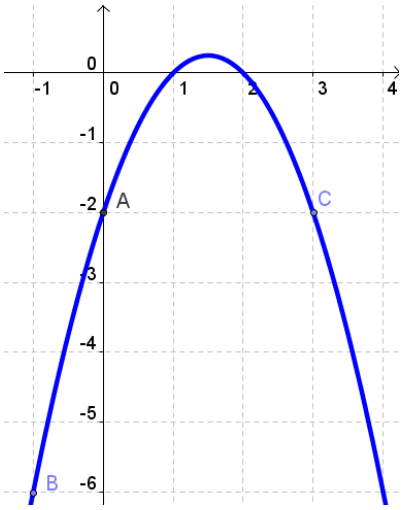
Näide 2. Kas punktid $A(0; 2)$, $B(–1; –6)$ ja $C(3; –2)$ asuvad ühel paraboolil? Kui jah, siis leidke parabooli võrrand.
Parabooli võrrand on $y = ax^2 + bx + c$. Asendades punktide A, B ja C koordinaadid parabooli võrrandisse saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -2 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ -6 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ -2 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \end{cases},$$

mille lahendame programmiga Wiris (vt Joonis 1). Seega otsitav parabool on $y = -x^2 + 3x - 2$ (vt Joonis 2).



Joonis 1



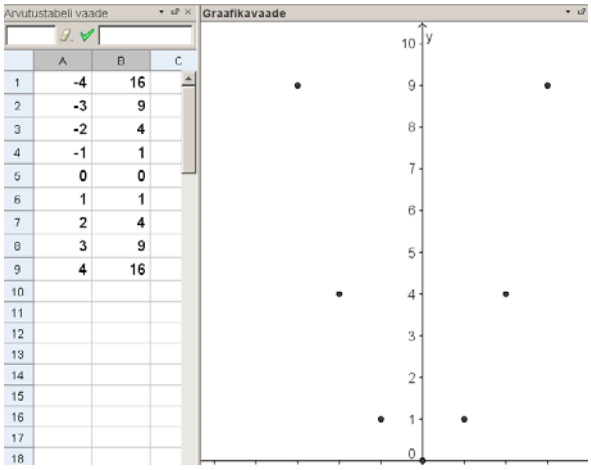
Joonis 2

Jooniste tegemiseks on GeoGebraga erinevaid võimalusi:

a) võib teha arvutustabeli, leida punktide koordinaadid ja siis punktid omavahel ühendada (vt Joonis 3);

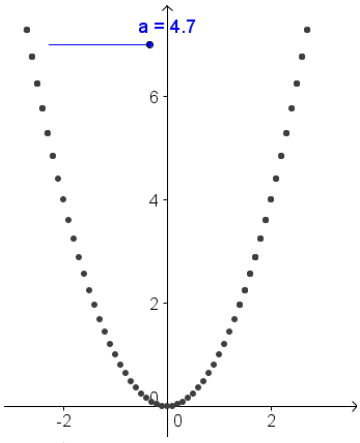
b) joone võrrandi võib kirjutada GeoGebra sisendribale, sel juhul saame kohe graafiku;

c) graafiku joonestamiseks ette antud lõigul [a; b] kasutame käsku Funktsioon. Näiteks sirge $y = 3x - 1$ joonestamiseks lõigul [-4; 6] kirjutame GeoGebra sisendreale: Funktsioon[y=3x-1,-4,7].



Joonis 3

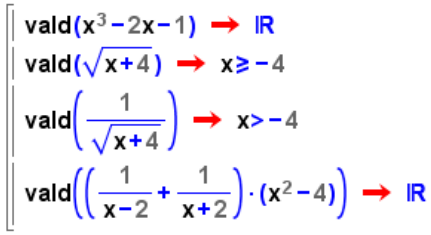
Graafiku punkthaaval joonestamiseks saab kasutada ka GeoGebra liugurit. Kui soovime joonestada funktsiooni $y = x^2$ graafiku lõigul [-5; 5], siis loome liuguri, kus muutujaks on a ning a väärtused muutuvad -5-st 5-ni sammuga 0,1. Sisendreale kirjutame P=(a,a*a). Nii saame ühe punkti. Muutes liuguri asendit saame järjest kõik punktid ette antud lõigust. Kui kasutada *Jälg sees* režiimi, siis saame terve hulga punkte, mille ühendamisel tekib funktsiooni $y = x^2$ graafiku. Liuguri väärtuste muutmiseks võime kasutada arvuti klaviatuuril olevaid nooli või hiirt. Samuti on olemas võimalus punktide ekraanile teket automatiseerida, selleks tuleb liuguril sisse lülitada *Animeerimine sees*. Arvutijoonise tegemisel tuleb arvestada sellega, et joone jämedus peab olema piisav selleks, et see oleks ka klassi lõpus istuvatele õpilastele näha. Soovitan kasutada vähemalt 7p joont ning kirja suurus peab olema vähemalt 18. Kindlasti tasub vältida joonise tegemisel värve (kollane, oranž, helesinine jms), mille korral joonis ei ole enam hästi loetav.



Joonis 4

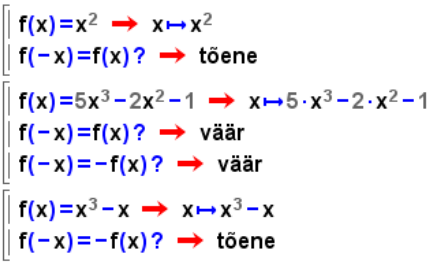
Laia matemaatika VII kursus – „Funktsioonid I. Arvjadad“

Kursus algab põhikooli materjali kordamisega ning esimeteks uuteks mõisteteks on **funktsiooni mõiste**, selle **üldtähis** ning **määramis- ja muutumispiirkond**. Määramispiirkonda saab leida arvutis Wirise abil. Siin peab arvestama sellega, et kui funktsiooni f esitavat avaldist on võimalik lihtsustada, siis võib esialgse avaldise määramispiirkond erineda lihtsustatud avaldise määramispiirkonnast. Wiris leiab määramispiirkonna lihtsustatud avaldise järgi (vt Joonis 5, viimane avaldis).



Joonis 5

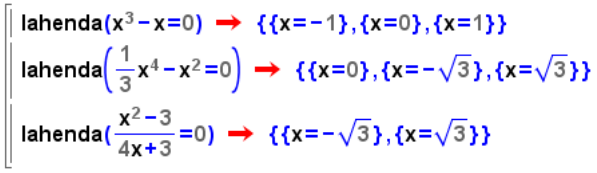
Seda, kas funktsioon on **paarisfunktsioon**, **paaritu funktsioon** või pole kumbki neist, soovitan kontrollida Wirise abil (vt Joonis 6). GeoGebraga võib siis soovi korral teha ka joonise. Jooniselt on raskusteta näha, et kui punkt $P(x; y)$ kuulub paarisfunktsiooni graafikule, siis sellel graafikul on ka punkt $P'(-x; y)$. Paaritu funktsiooni graafikul paiknevad punktid $Q(x; y)$ ja $Q'(-x; y)$.



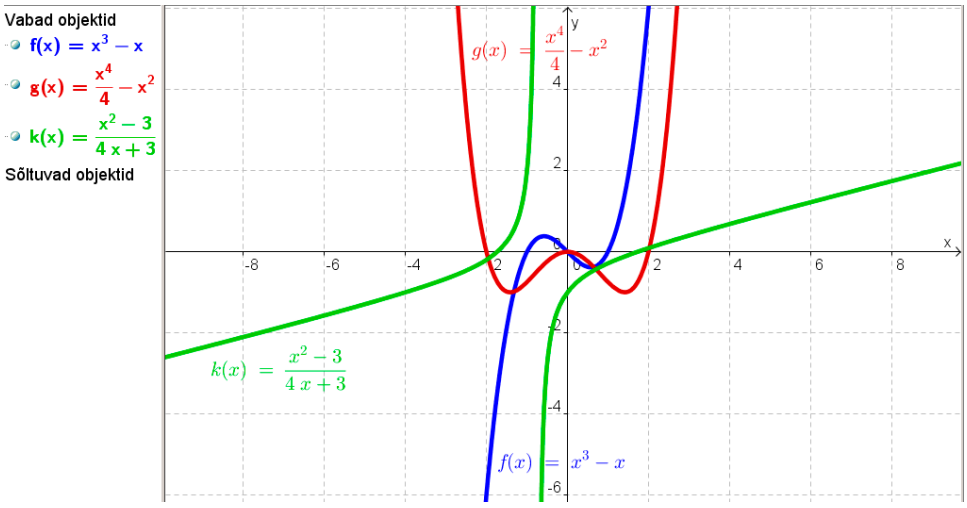
Joonis 6

Funktsiooni **nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad** saab leida (või leitud väärtusi kontrollida) Wirise abil. Nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $f(x) = 0$, positiivsuspiirkondade leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) > 0$ ja negatiivsuspiirkondade leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) < 0$.

Wirise abil on hea kontrollida, kas n.ö käsitsi leitud nullkohad on õiged (vt Joonis 7). Sama saab teha GeoGebra abil, lisaks saab joonise abil leida positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad (vt Joonis 8).

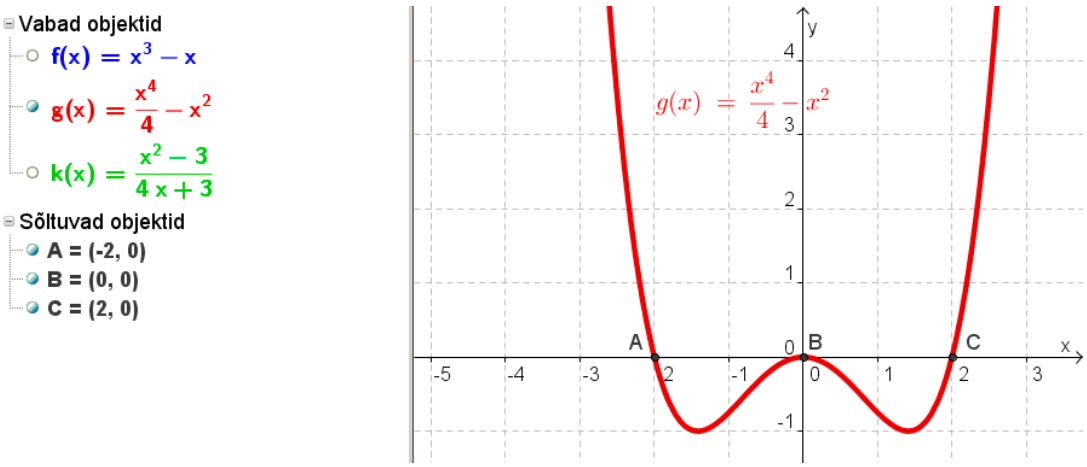


Joonis 7



Joonis 8

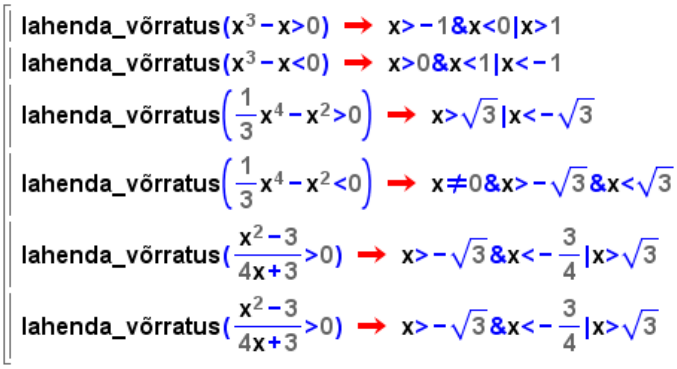
Joonisel 8 on kolm funktsiooni graafikut. Neid saab algebraaknas funktsiooni nime ees oleva nupukese abil peita või nähtavaks teha. Funktsiooni nullkohtade leidmiseks on GeoGebras käsk **Nullkohad**. Selle käsu rakendamisel märgitakse joonisele punktid, kus graafik läbib (või puutub) abstsisstelge (vt Joonis 9).



Joonis 9

Positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade leidmiseks GeoGebra joonis alati ei sobi (kui graafiku ja abstsisstelje lõikepunktide abstsissid on murdarvud või irratsionaalarvud), sest jooniselt ei saa täpseid väärtusi. Kui õpilane on ülesande lahendanud, siis tulemuste kontrollimiseks on GeoGebraga tehtud joonis piisavalt hea (irratsionaalarvuliste nullkohtade täpsete väärtuste asemel võtame nende kümnendlähendid ja vaatame, kas graafik lõikab (puudutab) seal abstsisstelge).

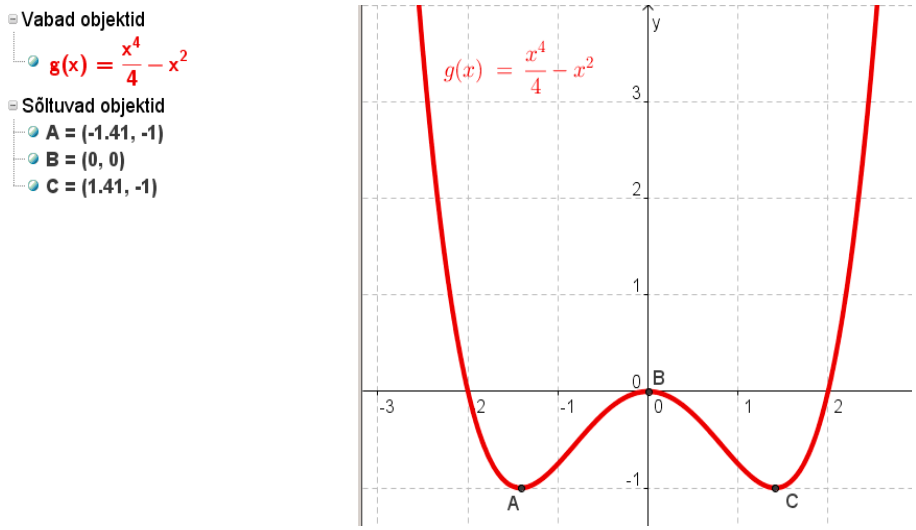
Positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade täpseks leidmiseks soovitan Wirist (vt Joonis 10).



Joonis 10

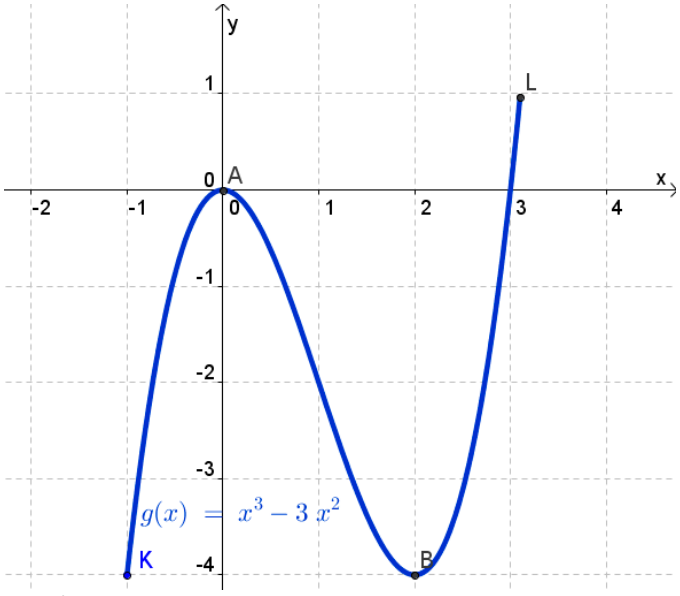
Enne seda, kui õpilased hakkavad Wirist iseseisvalt kasutama, on otstarbekas selgitada märkide & ja | tähendus Wirises. Sümbol & tähistab siin ühisosa ning | hulgateoreetilist ühendit.

Funktsioonide **kasvamis- ja kahanemisvahemikud** ning **ekstreemumid** leitakse selles kursuses ilma funktsiooni tuletist kasutamata. Seetõttu on uuritavad funktsioonid nii lihtsad, et oleks võimalik kasvamis- ja kahanemisvahemikud leida graafiku abil (või muid omadusi kasutades). Programmis GeoGebra on olemas käsk, mille abil leitakse **ekstreemumpunktid**. Kirjutades sisendreale **Ekstreemum**, saab leida funktsiooni globaalsed ekstreemumid, kuid on võimalik leida ka suurim ja vähim väärtus ette antud lõigul [a; b] (Joonis 11 ja Joonis 12).



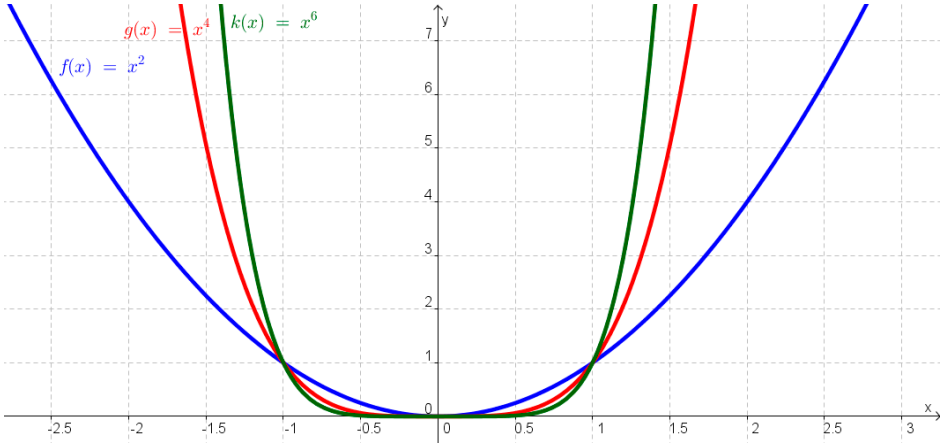
Joonis 11

Joonisel 12 on funktsiooni $y = x^3 - 3x^2$ graafik lõigul [–1; 3,1]. Funktsiooni ekstreemumpunktid on *A* ja *B*. Lisaks leiame funktsiooni $g(x)$ väärtused kohal $x = -1$ ja $x = 3{,}1$. Punktide *K*, *A*, *B* ja *L* ordinaatide võrdlemisel leiame suurima ja vähima väärtuse ette antud lõigul.



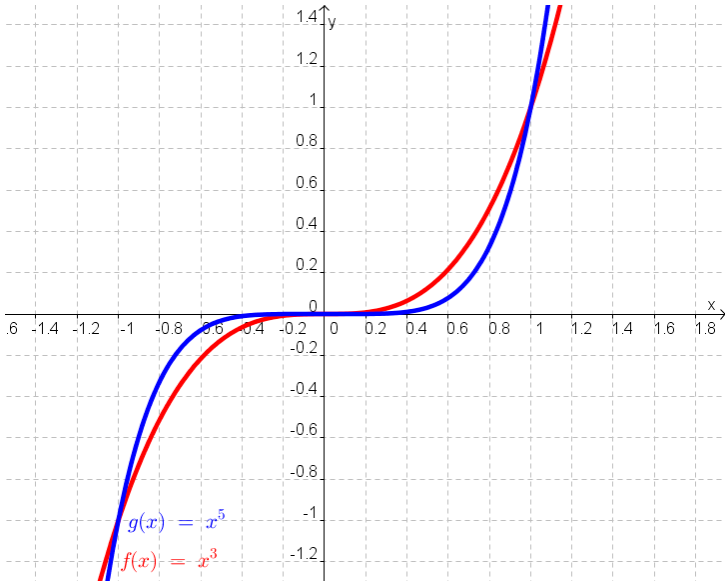
Joonis 12

Astmefunktsioonide $y = x^n$ omaduste uurimisel arvuti abil soovitan vaadelda eraldi kahte juhtumit: a) *n* on paarisarv; b) *n* on paaritu arv. Kui *n* on positiivne paarisarv (2; 4; …), siis tuleb pöörata erilist tähelepanu graafikute „käitumisele“ vahemikus]–1; 1[(vt Joonis 13).



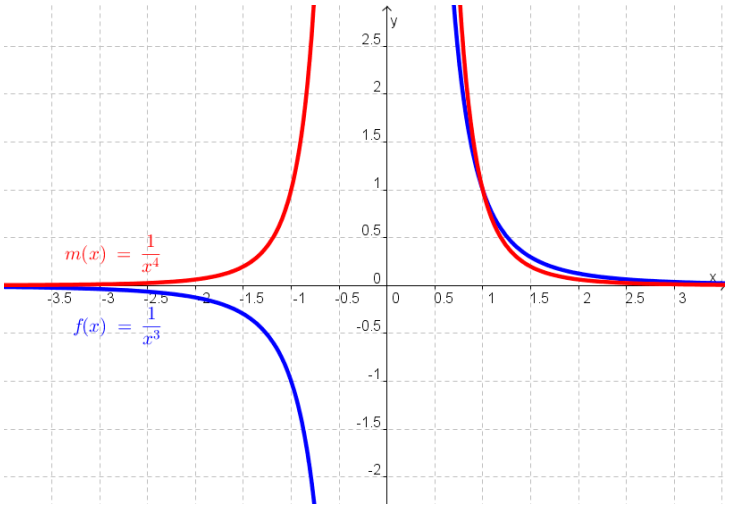
Joonis 13

Kui n on paaritu arv, siis tuleb jällegi õpilastele selgitada, miks vahemikus]–1; 1[$f(x) < g(x)$.



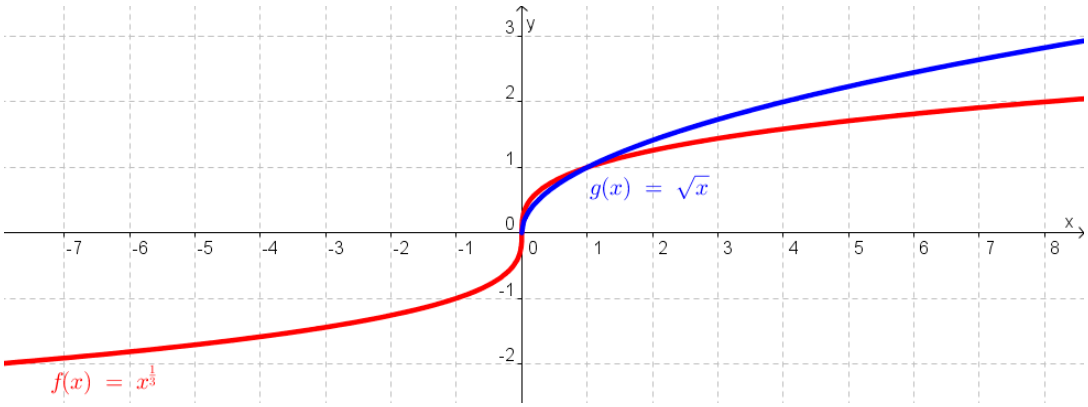
Joonis 14

Eraldi tuleb uurida juhtumeid, kus n on negatiivne täisarv, st uurime funktsioonide $y = x^{-2}, y^{-3}$ jne graafikuid (täpsemalt öeldes graafikute abil nende funktsioonide omadusi) (vt Joonis 15).



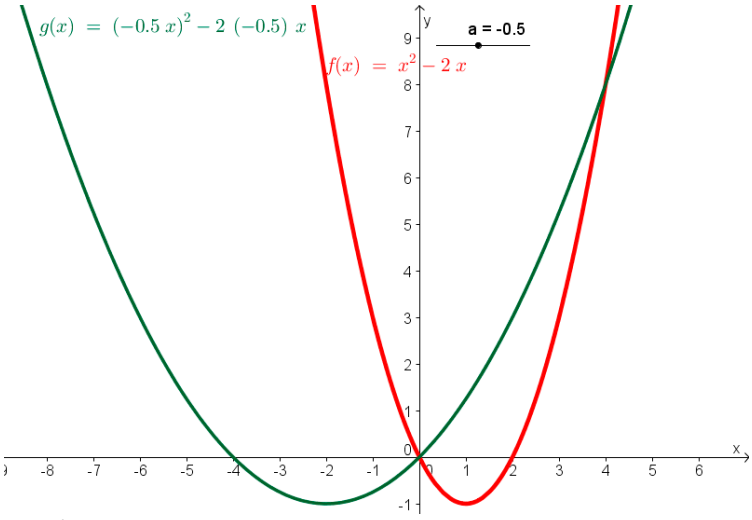
Joonis 15

GeoGebra abil saab hõlpsasti uurida ka funktsioonide $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ jms graafikuid ning nende funktsioonide omadusi (vt Joonis 16).



Joonis 16

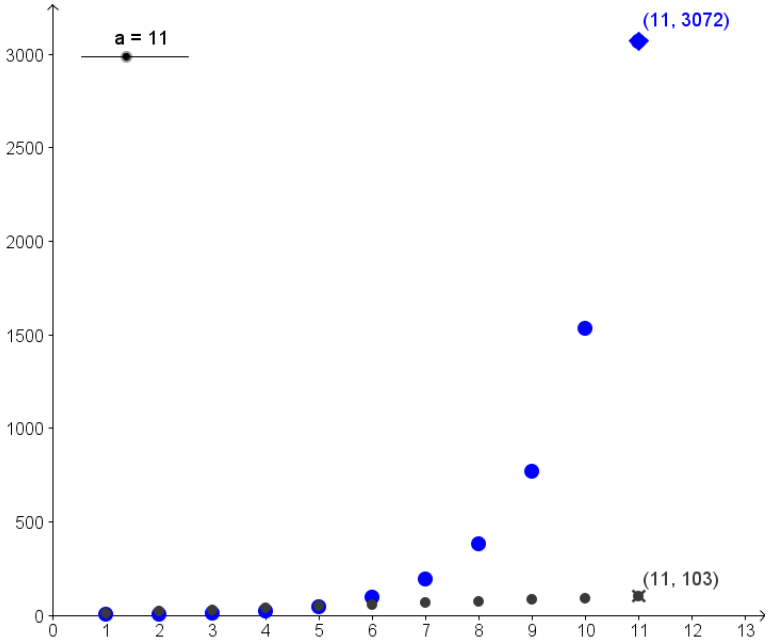
Funktsioonide ***f*(*x*) + *a*, *f*(*x* + *a*), *f*(*ax*)** ja ***af*(*x*)**, kus $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ graafikute joonestamiseks saab kasutada programmi GeoGebra. Kui õpilane peab skitseerima graafiku vihikusse, siis peab ta teadma, kuidas arv *a* mõjutab vastava funktsiooni graafiku asendi muutumist funktsiooni *f*(*x*) suhtes. Siin soovitan kasutada liugurit ja mõningatel juhtudel ka „*Jälg sees*" režiimi. Muutes arvu *a* väärtust muutub ka funktsiooni $f(x) + a$, $f(x + a)$, $f(ax)$ ja $af(x)$ graafiku asend funktsiooni *f*(*x*) graafiku suhtes. Üks näide on joonisel 17, millel on funktsiooni $f(x) = x^2 - 2x$ ja $f(ax)$ graafikud.



Joonis 17

Jadade (sh aritmeetiline ja geomeetriline jada) liikmeid kujutavaid punkte saab esitada GeoGebra abil. Joonisel 18 on jadade $a_n = 4 + 9n$ ja $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ liikmeid kujutavad punktid (abstsissteljel on jada liikme järjekorranumber ja ordinaatteljel jada liikme arvväärtus).

Jada liikmeid kujutavad punktid defineeritakse GeoGebras nii: P=(a,4+9a) ja Q(a,3·2^(a-1). Tähist (st tähte P või Q) ei ole mõtet näidata, selle asemel näitame teljestikus punktile vastavat jada liikme järjekorra-numbrit ja vastava liikme arvväärtust. Jada piirväärtuse õppimisel võime kasutada sama kujutamisviisi, kuid sel juhul on joonisel vaid ühe jada liikmed.



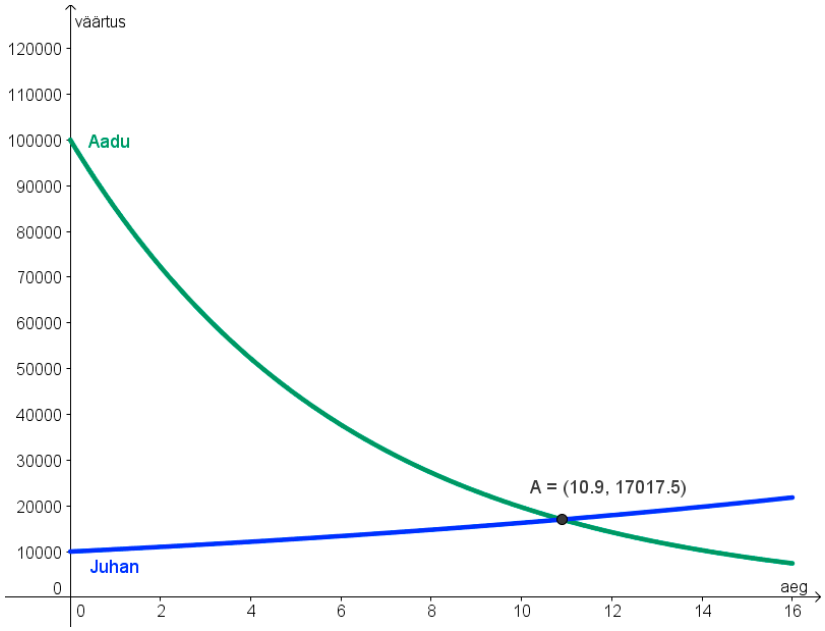
Joonis 18

Laia matemaatika VIII kursus – „Funktsioonid II“

Kursus algab liitprotsendilise kasvamise ja kahanemise käsitlemisega. Saadud seoste graafikuid saab esitada GeoGebraga.

Näide. Juhanil on 10000 € eest kinnisvara, mille väärtus aastas kasvab ca 5%. Juhani vennal Aadul on 100000 € maksev Lexus, mille turuväärtus kahaneb aastas ca 15%. Kui mitme aasta pärast on kinnisvara väärtus võrdne Lexuse turuväärtusega?

Juhani kinnisvara väärtus on n aasta pärast $J = 100000 \cdot 1,05^n$, Aadu auto väärtus n aasta möödudes $A = 100000 \cdot 0,85^n$. Joonestades „väärtuste“ graafikud näeme, et auto väärtus on 11 täisaasta möödudes väiksem kinnisvara hinnast ning hinnad on võrdsed ligikaudu 10,9 aasta pärast (vt Joonis 19). Siin tuleb arvestada veel mitmete asjaoludega: kinnisvara hind võib majanduses toimuvate protsesside tõttu oluliselt kiiremini tõusta (kuid võib ka mingil määral langeda) jms, seega on saadud aeg 10,9 aastat hinnanguline.

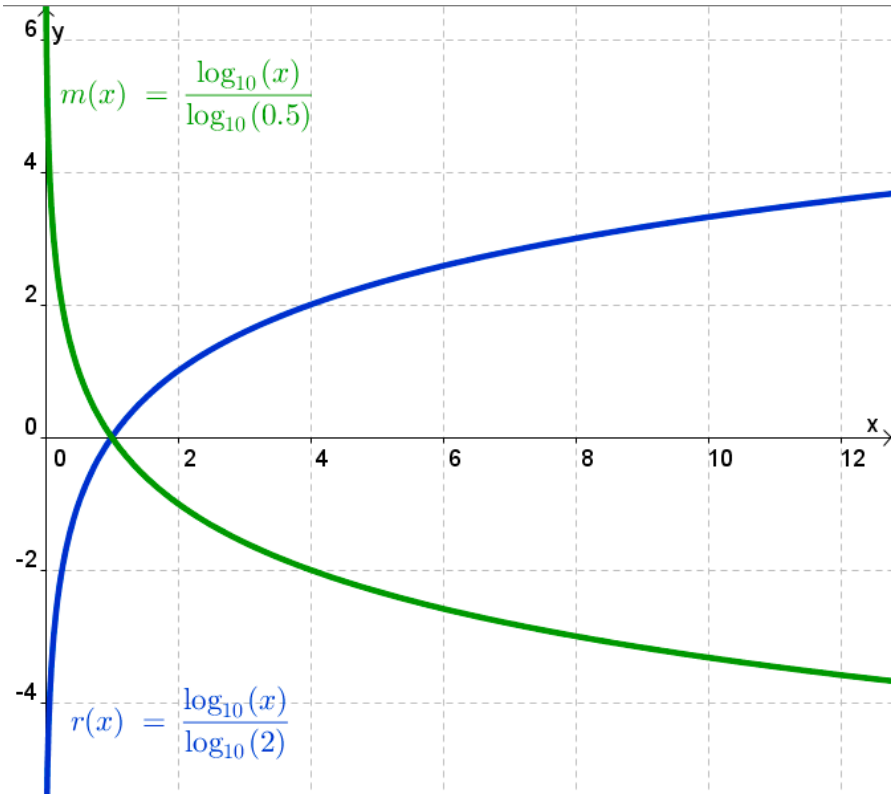


Joonis 19

Eksponent- ja logaritmfunktsioonide graafikute joonestamiseks soovitan kasutada jällegi GeoGebrat. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ uurime kahel erineval juhul: a) $0 < a < 1$ ja b) $a > 1$. Graafiku joonestamisel saab kasutada liugurit ning selle abil muuta arvu a väärtust. Niiviisi on muutused graafiku kujus hästi esiletoodavad, samuti on näha, et graafikul on üks püsipunkt (0; 1).

Logaritmfunktsiooni graafikut joonestades tuleb arvestada sellega, et GeoGebrat kasutades ei saa kirjutada logaritmi alust, seega saab kasutada üksnes naturaallogaritmi ln või kümnendlogaritmi ning vajaduse korral on tarvis üle minna alusele 10 (või alusele e). Enne programmi kasutamist on vaja üle vaadata, millise logaritmiga on tegemist, kui kirjutada log(x), lg(x) ja ln(x). Sõltuvalt GeoGebra versioonist võivad siin olla erinevused. GeoGebra 3.2.0.0 puhul sisendreale kirjutatud log(x) ja ln(x) annavad naturaallogaritmi ning kümnend-logaritmi saamiseks tuleb kirjutada lg(x). GeoGebra versioon 4.2 (Beta) esitab joonisel ka logaritmi aluse, kuid mõningatel juhtudel on kirjapilt meile harjumatu. Kui soovime

joonestada $f(x)=\log_2 x$ graafikut, siis teisendame logaritmi aluselt 2 alusele 10 ning saame $f(x)=\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}$, arvutijoonisele ilmub aga tekst $f(x)=\frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$.



Joonis 10

Eksponent- ja logaritmfunktsioone kasutatakse füüsikas, bioloogias, majandusõppes jne. Matemaatika tunnis on võimalik neid funktsioone uurida ning saadud tulemuste põhjal joonestame graafiku, mida saab edasi kasutada mõnes eespool nimetatud õppeaine tunnis.

IX kursus – „Funktsiooni piirväärtus ja tuletis“

Funktsiooni piirväärtuse ja tuletise arvutamisel soovitan kasutada programmi Wiris. Vaatleme mõnda näidet (vt Joonis 21 ja Joonis 22).

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x} \to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \to 1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} \to +\infty$

$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} \to -\infty$

Joonis 21

$\text{tuletis}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) \to 1$

$\text{tuletis}(x-\sin(x)) \to -\cos(x)+1$

$\text{tuletis}(4x\cdot(\ln(x))) \to 4\cdot\ln(x)+4$

$\text{tuletis}\left(\frac{\log_2(x)}{\sin(x)}\right) \to \frac{-1.4427\cdot x\cdot\ln(x)\cdot\cos(x)+1.4427\cdot\sin(x)}{x\cdot\sin(x)^2}$

Joonis 22

Funktsiooni uurimise ülesande lahendamine viib terve rea üksikute alaülesannete lahendamisele: a) määramis- ja muutumispiirkond, b) nullkohad, c) positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, d) esimese tuletise kriitilised väärtused, e) ekstreemumid, f) graafiku kumerus ja nõgusus, g) asümptoodid.

Koolis lahendatakse osaülesanded paberi ja pliiatsi abil ning saadud tulemuste põhjal skitseeritakse joonis. Arvuti abil on võimalik kontrollida osaülesannete lahenduste õigsust ning samuti saab võrrelda käsitsi joonestatud graafikut arvuti abil saadud graafikuga. Kindlasti tuleb õpilastes arendada graafikute lugemise oskust (seda läheb vaja ka igapäevaelus), st ette antud graafikult leitakse nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumid jms.

Funktsiooni uurimise ülesande arvutusliku poole võib realiseerida Wirise abil, graafikud soovitan teha GeoGebraga (vt Joonis 23 ja Joonis 24).

$f(x)=x^3-4x \rightarrow x \mapsto x^3-4\cdot x$

vald(f(x)) → $\mathbb{R}$

lahenda(f(x)=0) → {{x=−2},{x=0},{x=2}}

lahenda_võrratus(f(x)>0) → x>−2&x<0|x>2

lahenda_võrratus(f(x)<0) → x>0&x<2|x<−2

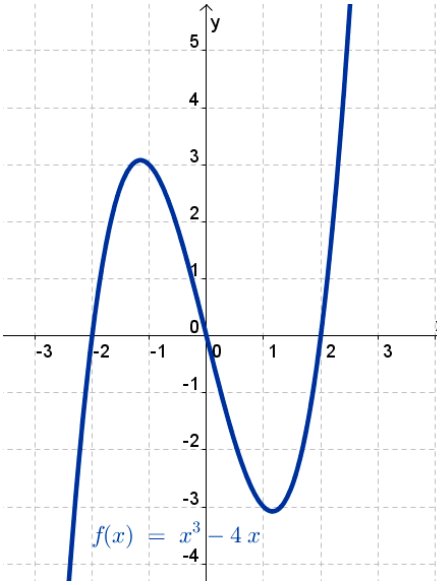
$g(x)=\text{tuletis}(f(x)) \rightarrow x \mapsto 3\cdot x^2-4$

lahenda(g(x)=0) → $\left\{\left\{x=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\},\left\{x=-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}\right\}$

lahenda_võrratus(g(x)>0) → $x>\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \mid x<-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$

lahenda_võrratus(g(x)<0) → $x>-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \,\&\, x<\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$

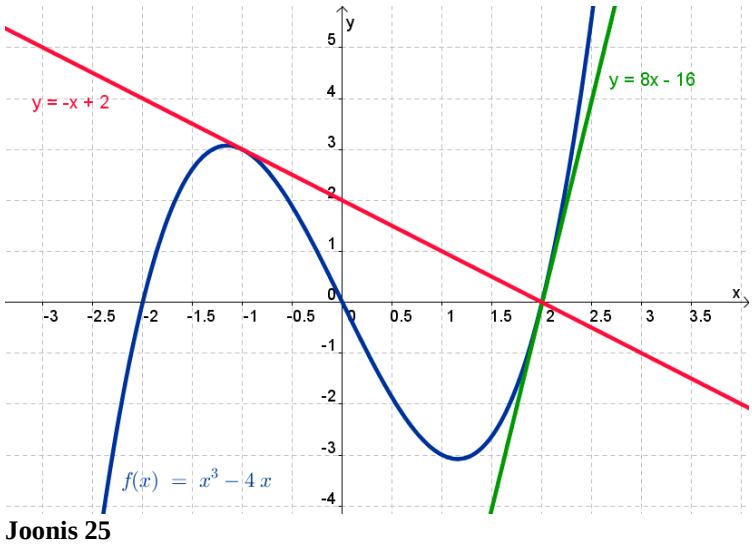
Joonis 23



Joonis 24

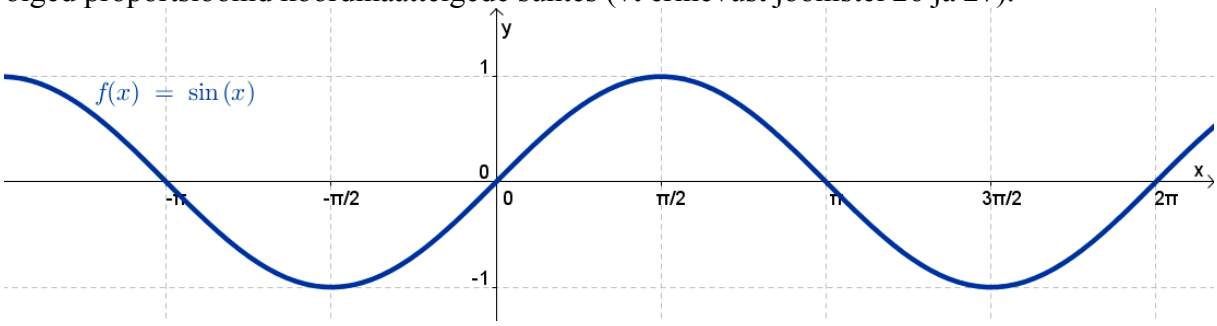
Funktsiooni graafiku **puutujaga** seotud ülesannete puhul saab GeoGebras kasutada spetsiaalset nuppu „Puutuja“.

Joone puutuja kohta leiab mitmeid materjale mottwikist, sh Sirje Sild´i (Nõo Reaalgümnaasium) poolt koostatud GeoGebra töölehed.



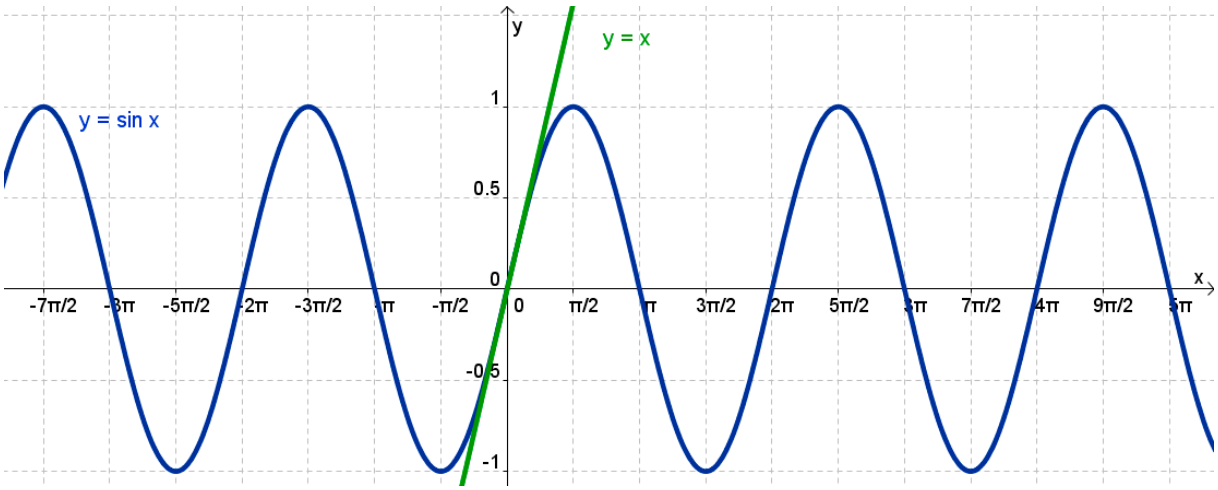
Joonis 25

Trigonomeetriliste funktsioonide käsitlus algab perioodilise (mitteperioodilise) funktsiooni mõiste defineerimise ja perioodi leidmisega. Seejärel jõutakse funktsioonideni $y = \sin x$, $y = \cos x$ ja $y = \tan x$. Tavaliselt konstrueeritakse siinus- ja koosinusfunktsiooni graafik ühikringi abil. Vastava GeoGebra töölehe võib iga õpetaja ise koostada, kuid võib kasutada ka juba olemasolevaid[1]. Viidatud tööleht on saksakeelne, kuid eeldatavalt kõigile arusaadav. Väga oluline on, et esimeste tahvlile skitseeritud (või ekraanile näidatud) graafikute puhul on õiged proportsioonid koordinaattelgede suhtes (vt erinevust joonistel 26 ja 27).



Joonis 26

Joonisel 26 on proportsioonid õiged, joonisel 27 ilmselgelt valed. Sirge $y = x$ poolitab esimese ja kolmanda koordinaatveerandi, joonisel 27 see nii ei ole. Kuigi erinevatel telgedel võib valida erineva pikkusega pikkusühikud, siis antud juhul pole see õigustatud, sest võib viia põhimõtteliste vigadeni.



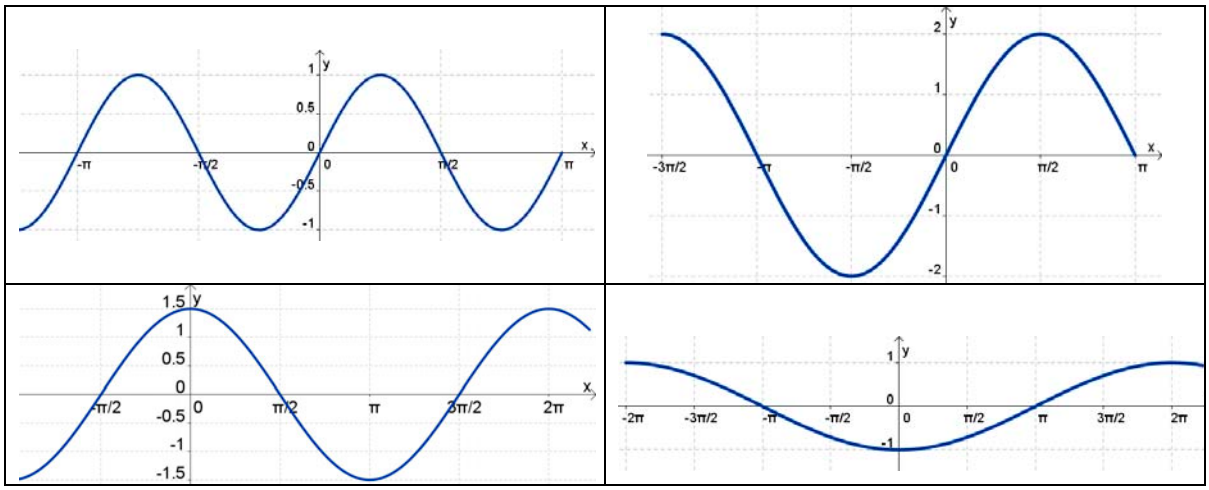
Joonis 27

Olulisel kohal on trigonomeetriliste funktsioonide graafikute käsitsi skitseerimine mingis ette antud lõigus [a; b]. Seda oskust eeldatakse ka riigieksami ülesannete lahendamisel. Kui on antud funktsioon $y = a \sin kx$ (või $y = a \cos kx$, $y = a \tan kx$), siis tuleb õpetajal selgitada arvude a ja k tähendust ning mõju graafiku asendile (neid funktsioone kasutatakse ka gümnaasiumi füüsika kursuses). GeoGebra abil tehtud joonised võimaldavad määrata ka trigonomeetriliste võrrandite lahendite arvu mingis lõigus või vahemikus. Samuti saab leida võrrandi ligikaudseid lahendeid, kui võrrand pole teiste võtetega lahendatav (näiteks $x + \sin x = 2$).

Graafikute järgi funktsioonide tuvastamiseks võib teha õpilastega mitmesuguseid harjutusi. GeoGebra abil võib valmis teha graafikud ning neid võib näidata interaktiivsele tahvlile koos

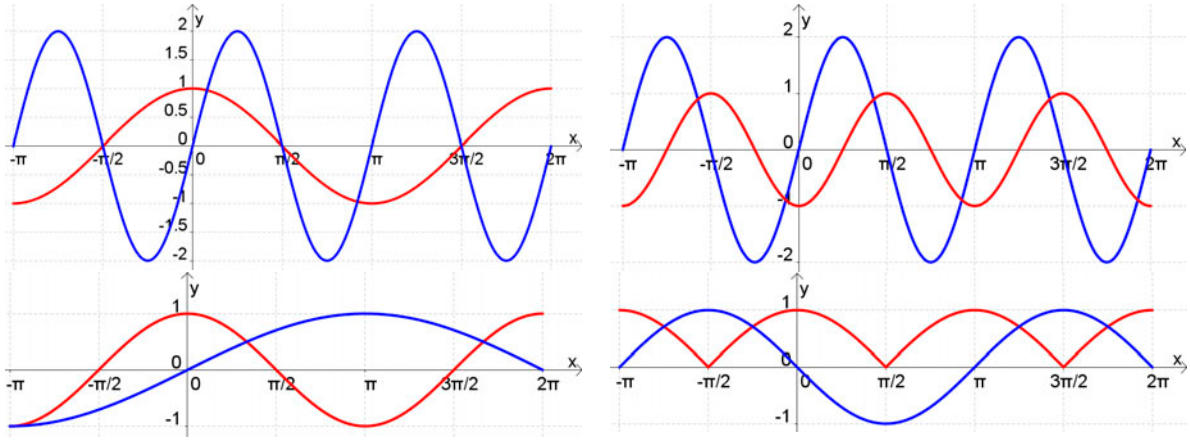
[1] http://www.geogebratube.org/student/m1631

võimalike analüütiliste esitustega. Õpilased viivad funktsiooni vastavusse graafikuga ja selgitavad oma valiku põhjuseid. Ühekordseks kasutamiseks sobib ka joonisel 28 olev tabel, kus on erinevate funktsioonide graafikud. Õpilased leiavad amplituudi, perioodi ning saadud andmete põhjal määravad, mis funktsiooniga on tegemist.



Joonis 28

Õpilaste jaoks on võrreldes eelmiste näidetega keerulisemad need juhtumid, kus ühte teljestikku tuleb joonestada kahe (või enama) trigonomeetrilise funktsiooni graafik. Sel juhul soovitan alustada arvutijoonistega ning siis üle minna käsitsi graafikute skitseerimisele. Mõned näited, mida tasub klassis uurida on joonisel 29.



Joonis 29

Laia matemaatikakursuse käsitlemisel leiab lisaks eespool toodule lisamaterjale Koolielust[2], mottwikist[3], Miksikesest[4], GeoGebraTube´st[5], Youtubest[6] (videomaterjalid), Teachertube´st[7] jt matemaatikaga seotud internetilehekülgedelt. Enne mingi tundmatu õppematerjali kasutamist tuleb see kriitilise pilguga üle vaadata, et vältida piinlikke olukordi koolitunnis. Tundideks ettevalmistamisel võib teha abimaterjale ka ise. Kuigi nende valmistamiseks kulub palju aega, siis eeliseks on see, et sel juhul õpetaja teab täpselt, mida antud õppematerjal sisaldab ning on võimalus erineva tasemega paralleelklasside jaoks materjale kohandada.

[2] http://www.koolielu.ee
[3] http://mott.edu.ee
[4] http://www.miksike.ee
[5] http://www.geogebratube.org/
[6] http://www.youtube.com/
[7] http://teachertube.com/

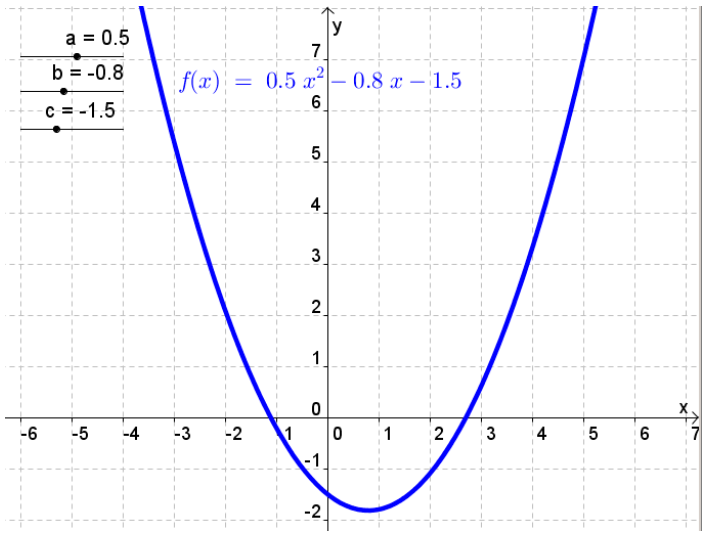
Kitsa matemaatika V kursus – „Funktsioonid I“

Kursuse alguses tegeletakse kordavalt lineaarfunktsiooni, ruutfunktsiooni ja pöördvõrdelise sõltuvusega. Need teemad on küll põhikoolis läbitud, kuid praktika näitab, et nii mõnigi õpilane jääb hätta sirge või parabooli joonestamisega. Seepärast on vajalik, et õpetajal on ülesandeid, kus õpilane teeb graafikuid paberile, kuid harjutamiseks ning kinnistamiseks võib kasutada arvutiprogrammide abi.

Ülesanne 1. Joonestage teljestikku sirged $y = x + 3$, $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ning paraboolid $y = -x^2 + 1$ ja $y = (x + 3)(x - 2)$. Kontrollige jooniste õigsust programmiga GeoGebra.

10. klassis tuleb selgitada ja näidata arvude a, b ja c mõju funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku kujule. Seda saab teha programmiga GeoGebra väga lihtsalt, kui kasutada liugureid (vt Joonis 30). Selle joonise abil saab selgitada ka seda, miks arv a ei tohi olla null. Joonisele võib soovi korral lisada parabooli telje ning haripunkti.

Analoogiliselt võib toimida lineaarfunktsiooniga $y = ax + b$ ning pöördvõrdelise sõltuvusega $y = \frac{a}{x}$.



Joonis 30

Funktsiooni **määramispiirkonna**, **nullkohtade**, **positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade** leidmiseks võib kasutada neid soovitusi, mis on antud laia kursuse samade teemade kohta. Siin tuleb arvestada sellega, et kitsas kursuses vaadeldavad funktsioonid on üldjuhul lihtsamad võrreldes laia kursuse funktsioonidega. Kui määramispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad on õpilasel käsitsi arvutades leitud, siis tuleb leida võimalus tulemuste kontrollimiseks arvuti abil. Klassis saab seda teha nii, et näidatakse funktsioonide graafikud järgemööda ekraanile (interaktiivsele tahvlile vms). Kodutööde kontrollimiseks saavad õpilased ise GeoGebrat kasutada ning see soovitus koos elementaarsete programmi kasutamise võtetega tuleb õpilastele ka anda (see ei tähenda seda, et kulutatakse 2-3 tundi spetsiaalselt GeoGebra ja Wirise õpetamiseks).

Kindlasti tuleb arendada **graafikute lugemise** oskust. Selleks võib õpetaja teha PowerPointi esitlusfaili, kus on kümmekond graafikut ning nendelt leitakse nii palju erinevaid omadusi kui võimalik. PowerPointi asemel võib kasutada ka interaktiivse tahvli tarkvara, näiteks Smart Notebook 10 vms. Graafikute joonestamisel on vaja käsitleda ka juhtumeid, kus telgedel olevad arvud ulatuvad sadadesse või isegi tuhandetesse. Graafikute lugemise oskust on õpilastel vaja füüsikas, geograafias kui ka mõningate bioloogia ülesannete lahendamisel ja loomulikult igapäevaelus ajalehtedes või ajakirjades oleva teksti mõistmiseks. Mitmesuguseid graafikuid rahanduse valdkonnast leiab SEB ja Swedbank´i veebilehelt.

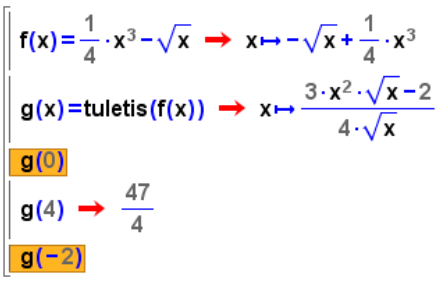
Funktsiooni **kasvamis- ja kahanemisvahemike** ning **ekstremaalsete väärtuste** leidmiseks kasutatakse funktsioonide graafikuid (tuletis tuleb hiljem). Õpilaste tähelepanu tuleb juhtida sellele, et kasvamis- ja kahanemisvahemike kirjapanemisel ei tohi kasutada hulgateoreetilise ühendi ($\cup$) märki, sest see võib viia vastuoluni kasvamise ja kahanemise definitsiooniga.

Eksponent- ja logaritmfunktsiooni käsitlemisel võib järgida neid soovitusi, mis on antud laia kursuse puhul. Kitsas kursuses tuleb lahendada mitmesuguseid rakendusülesandeid (populatsiooni kasv, objekti väärtuse suurenemine või vähenemine, õhurõhk erinevatel kõrgustel merepinnast, radioaktiivne lagunemine jms). Kõiki neid protsesse saab esitada graafiliselt.

Trigonomeetriliste funktsioonide käsitlemisel on jällegi oluline roll graafikute skitseerimisel ja nendelt vastuste leidmisel esitatud küsimustele. Soovitused trigonomeetriliste funktsioonide graafikute joonestamise osas on üldjoontes samad, mis laia kursuse puhul. Siinus- ja koosinusfunktsiooni graafiku joonestamisel soovitan abstsissteljele märkida nurgad radiaanides (st 0, $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \ldots$) ja vältida kraadimõõdu kasutamist. Et õpilastel on harjumuspärasem (ja ka lihtsam) opereerida nurgakraadidega, siis tuleb alternatiivina kõne alla ka võimalus, et nurgad on kirja pandud nii radiaanides kui ka kraadides. Igal juhul peab vähemalt esimeste graafikute puhul säilitama õiged proportsioonid koordinaattelgede suhtes.

Kitsa matemaatika VI kursus – „Funktsioonid II“

Selles kursuses keskendutakse **funktsiooni tuletise** leidmisele ja kasutamisele. Funktsioonide hulk, millest tuletist leitakse, on üsna piiratud. Kuna tuletise õppimisele ei eelnenud piirväärtuse käsitlemist, siis põhjendamise (tuletamise) osa on selle teema puhul tagasihoidlik ning põhiliselt keskendutakse elementaarfunktsioonide tabeli ja tuletise leidmise eeskirjade selgeksõppimisele. Tuletise leidmisel (siin ka tuletis antud kohal x_0) soovitan kasutada programmi Wiris (vt Joonis 31). Jooniselt on näha, et tekkisid probleemid tuletise väärtuse arvutamisel kohal $x = 0$ ja $x = -2$. Mõni nutikam õpilane leiab kindlasti ka põhjuse, miks tuletist nendel kohtadel ei saa leida. Sarnaseid näiteid võib tuua teisigi.

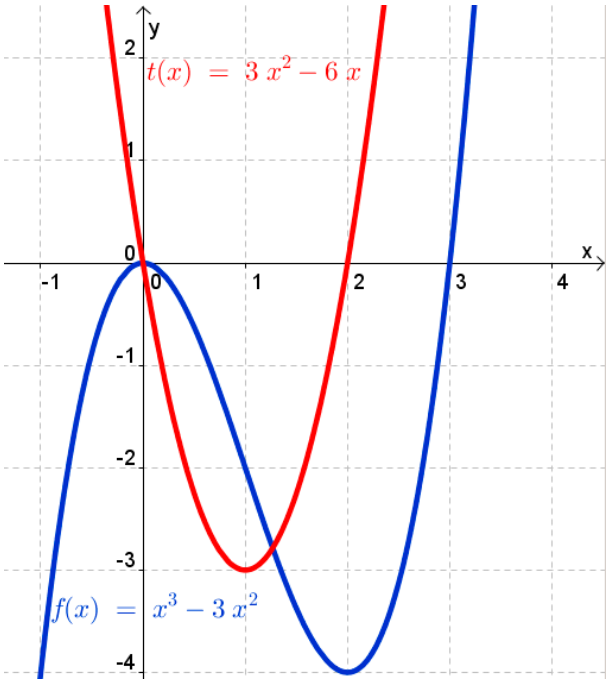


Joonis 11

Funktsiooni **uurimisel tuletise abil** soovitan kasutada GeoGebrat ning võib joonestada funktsiooni ja selle tuletise graafiku ühte koordinaatteljestikku (vajadusel saab tuletise graafiku ka ära „peita“). Nii saab graafiku abil leida (või arvutustulemusi kontrollida) tuletise nullkohad ning need siduda funktsiooni ekstreemumkohtadega, analoogiliselt saab siduda omavahel funktsiooni kasvamisvahemikud ja tuletisfunktsiooni positiivsuspiirkonna (funktsiooni kahanemisvahemikud ja tuletisfunktsiooni negatiivsuspiirkonna) (vt Joonis 32). Käsitsi arvutades tasub võrratuste lahendihulkade õigsuses veendumiseks kasutada programmi Wiris. Õpetajal tuleb õpilastele eelnevalt selgitada sümbolite | ja & tähendust Wirises.

Märkeruudu abil on võimalik tuletisfunktsiooni graafik jooniselt eemaldada (selle saab vajaduse korral tagasi tuua).

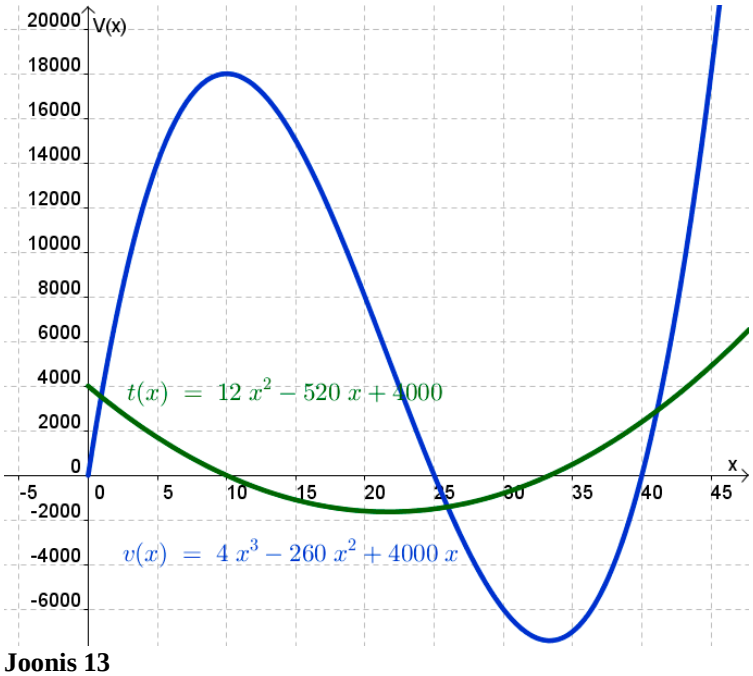
Kui on vaja leida funktsiooni suurim või vähim väärtus ette antud lõigul, siis joonestame graafiku selles lõigus. GeoGebras on selleks käsk **Funktsioon**. Kirjutades Funktsioon[x^2-3,-2,4] käsureale, saame funktsiooni $y = x^2 - 3$ graafiku lõigul [–2; 4]. Jooniselt leiame suurima ja vähima väärtuse antud lõigul.



Joonis 12

Reaalse sisuga ekstreemumülesannete puhul on jällegi otstarbekas teha nii vastava funktsiooni kui ka tuletisfunktsiooni graafik ühte teljestikku. Sel juhul ongi tuletisfunktsiooni nullkohad võimalikud ülesande lahendid.

Ülesanne.
Ristkülikukujulisest plekitahvlist mõõtmetega 50 cm ja 80 cm lõigatakse nurkadest ära ruudukujulised tükid ning servad murtakse üles. Nii saadakse pealt lahtine karp. Kui pikk peab olema äralõigatava ruudu külg, et tekiks suurima ruumalaga karp?
Ruumala sõltuvust ruudu küljest kirjeldab funktsioon $V(x)$, kus $v(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.
Leiame funktsiooni $v(x)$ tuletise $v'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$.



Joonis 13

Võrrandi $12x^2 - 520x + 4000 = 0$ lahendid on 10 ja $33\frac{1}{3}$.

Neist esimene sobib ülesande lahendiks (vt joonist).

Funktsioonide käsitlemisel arvutiprogrammidega on see oht, et õpilased teevad valdava osa graafikutest ning arvutustööst arvuti abil ning minetavad graafikute käsitsi skitseerimise oskuse. Seepärast tuleb aeg-ajalt õpilastel lasta ka mahukaid ülesandeid käsitsi lahendada.