Funktsioonide õpetamisest gümnaasiumi kitsas ja laias kursuses

Hele Kiisel, Hugo Treffneri Gümnaasium

Alustades funktsioonide teema õpetamist, soovitan kõigil gümnaasiumis õpetavatel õpetajatel tutvuda ka põhikooli valdkonnaraamatus Loo Keskkooli õpetaja-metoodiku Allar Veelmaa kirjutatud artikliga „Funktsioonide õpetamisest põhikooli matemaatikakursuses“ (Veelmaa, 2010).

Põhikooli õpilane peab suutma leida lineaarfunktsioonide graafikute lõikepunkti, lineaar- ja ruutfunktsiooni nullkohti ning parabooli haripunkti, kuid ta võiks olla kuulnud juba ka mõisteid: kasvamine, kahanemine, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, maksimum- ja miinimumpunkt. Neid termineid saab kasutada põhikoolis graafikuid vaadeldes. Kindlasti ei pea neid funktsioonide graafikute omadusi seal defineerima. Selline funktsiooni arutlemine annab parema võimaluse funktsiooni graafiku mõistmiseks ja eeldused 11. klassis keerulisemate funktsioonide uurimiseks.

Põhikooli teadmised funktsioonide kohta võtab kokku näiteks ülesanne:

A. Joonesta sirged $y = -0{,}5x + 5$ ja $y = -2x + 8$ ühes ja samas koordinaatteljestikus. Arvuta sirgete lõikepunkti A koordinaadid. Tähista sirgete lõikepunktid *x*-teljega tähtedega B ja C. Joonesta kolmnurk ABC. Arvuta kolmnurga pindala ja ümbermõõt.
B. Ruutfunktsiooni $y = x^2 - ax + b$ graafik läbib punkte D(1;9) ja E(5;1). Leia kordajad *a* ja *b*. Joonesta saadud ruutfunktsiooni graafik eelmisesse teljestikku ning kontrolli, millised kolmnurga ABC tipud asuvad sellel graafikul. Põhjenda! Leia saadud parabooli haripunkti koordinaadid!

Põhikooli teadmistele lisanduvad 10. klassis veel võrrandite, võrratuste ja võrrandi- ning võrratussüsteemide lahendamise oskus. Ka neid algebra teemasid õpetades on vajalik silmas pidada, et kõige enam vajatakse õpitavaid oskusi funktsioonide uurimise juures. Me ei pea ajas ette ruttama, kuid lineaar- ja ruutfunktsioonile saame alati tähelepanu juhtida. Olulisel kohal on ülesande sõnastamine mitmel erineval viisil.

Näiteks ruutvõrrandi lahendamist võib sõnastada järgnevalt:

- Lahenda võrrand $x^2 - x - 2 = 0$.
- Leia funktsiooni $y = x^2 - x - 2$ nullkohad.
- Milliste *x* väärtuste korral funktsiooni $y = x^2 - x - 2$ graafik lõikab abstsisstelge?
- Milliste *x* väärtuste korral on funktsiooni $y = x^2 - x - 2$ väärtus null?
- Milliste *x* väärtuste korral on funktsioonide $y = x^2 - x - 2$ ja $y = 0$ väärtused võrdsed?

Samas võrratuse lahendamisel võib sõnastada teksti järgnevalt:

- Lahenda võrratus $x^2 - 5x + 6 > 0$.
- Leia funktsiooni $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ määramispiirkond.
- Leia funktsiooni $f(x) = x^2 - 5x + 6$ positiivsuspiirkonnad.
- Milliste *x* väärtuste korral omab avaldis $x^2 - 5x + 6$ ainult positiivseid väärtuseid?
- Antud on funktsioonid $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 5x - 6$. Millistel *x* väärtustel on täidetud tingimus $f(x) > g(x)$?
- Millistel *x* väärtustel on avaldise x^2 väärtused suuremad avaldise 5x – 6 väärtustest?
- Funktsiooni $f(x)$ tuletisfunktsioon on $f'(x) = x^2 - 5x + 6$. Leia funktsiooni $f(x)$ kasvamisvahemikud.

Gümnaasiumi 11. klassis tegeldakse funktsioonide teema süsteemse käsitlemisega. Kitsas matemaatikas käsitletakse funktsioonide teemat kahel korral. *Kursuses „Funktsioonid I“ omandatakse funktsiooni mõiste ja üldtähistus ning funktsiooni käigu uurimisega seonduvad mõisted (nullkoht, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, ekstreemumkoht, kasvamis- ja kahanemispiirkond, maksimum ja miinimum jne). Samuti omandatakse pöördfunktsiooni mõiste ning tuntakse graafikult paaris- ja paaritut funktsiooni. Õpilane omandab ainekavaga ettenähtud funktsioonide graafikute skitseerimise oskuse (astmefunktsioonid, kus* $n = -2; -1; 1; 2$*) nii käsitsi kui arvutil ning suudab kirjeldada etteantud funktsiooni graafiku järgi tema omadusi (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011).* Siin tuleb vahet teha, milliste funktsioonide graafikuid peab oskama skitseerida ja milliseid lugeda. Mõistete kinnistamiseks tuleb väga tõsiselt harjutada graafikute lugemist. Graafikute lugemise oskust vajavad ka teised õppeained nagu geograafia, füüsika, ühiskonnaõpetus jne. Selgitada tuleb mõistete ekstreemumkoht, ekstreemumpunkt ja ekstreemum erinevust, samuti nullkoht ja nullpunkt erinevust.

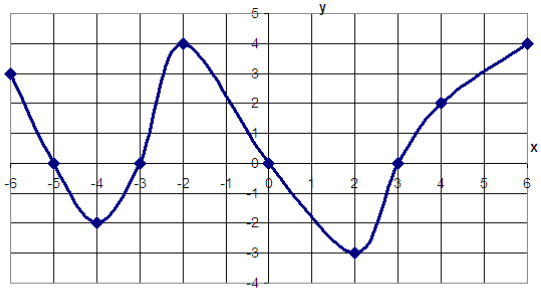
Laias matemaatikas pühendatakse funktsioonide teemale tunduvalt rohkem aega ning ka sügavusaste on teine. *7. kursuse „Funktsioonid I. Arvjadad“ lõppedes suudab õpilane selgitada funktsiooni mõistet ja üldtähist ning funktsiooni uurimisega seonduvaid mõisteid, samuti selgitab pöördfunktsiooni mõistet, leiab lihtsama funktsiooni pöördfunktsiooni ja skitseerib nende graafikud. Õpilane eristab paaris- ja paaritut funktsiooni ning tunneb nende graafikuid. Oluline oskus on liitfunktsiooni lahutamine lihtsamateks funktsioonideks. Õpilane oskab lugeda graafiliselt esitatud funktsiooni omadusi ning ise graafikuid skitseerida nii käsitsi kui arvutiprogramme kasutades. Õpilane valdab algebras õpitud võtteid, et leida valemiga esitatud funktsiooni määramispiirkonda, nullkohti, positiivsus- ja negatiivsuspiirkondi, samuti suudab ta kontrollida, kas funktsioon on paaris või paaritu. Kõigi nende oskuste omandamiseks alustatakse põhikoolis õpitud funktsioonide kordamisest ning jätkatakse oluliselt keerulisemate astmefunktsioonidega (kordavalt lineaar- ja ruutfunktsioon ning pöörvõrdeline sõltuvus, lisanduvad* $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ *ja* $y = |x|$*). Samuti uuritakse ja kirjeldatakse arvutit kasutades funktsioonide graafikute teisendusi (lüke üles – alla ning paremale – vasakule, kokkusurumine – venitamine)(Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011).*

Milles seisneb kahe kursuse erinevus? Mõlemas kursuses jõutakse samade omaduste tundmiseni, kuid kitsas kursuses on omandatud vähem oskusi ja õpilased ei saa seetõttu keerukamate funktsioonide uurimisega hakkama. Seega peab kitsas kursuses rohkem tähelepanu pöörama graafikute lugemisele.

Näide: Leia jooniselt 1 funktsiooni

- nullkohad,
- kasvamisvahemikud,
- positiivsuspiirkond,
- maksimumpunkti koordinaadid,
- miinimumkoht,
- maksimum,
- suurim ja vähim väärtus lõigul $[0;4]$.

Selgita!



Joonis 1.

Viimase alaküsimusega on paras aeg hakata tegema eeltööd funktsiooni tuletise uurimiseks. Hiljem (tuletise juures) võib, kasutades sama joonist, lasta lahenda ka võrrand $f'(x)=0$.

Olen üle 10 aasta hinnanud riigieksamite töid, viinud läbi koolitusi õpetajatele ning eksamiteks ettevalmistavaid kursusi õpilastele ja tänu sellele olen märganud, et paljudes koolides kasutatakse õpilaste ettevalmistamiseks väga raskeid ülesandeid. Mõistetest arusaamist võiks siiski kinnistada lihtsate ülesannetega, nagu näiteks:
Joonesta ühele joonisele funktsioonide $f(x)=x+4$ ja $g(x)=-2x+4$ graafikud.

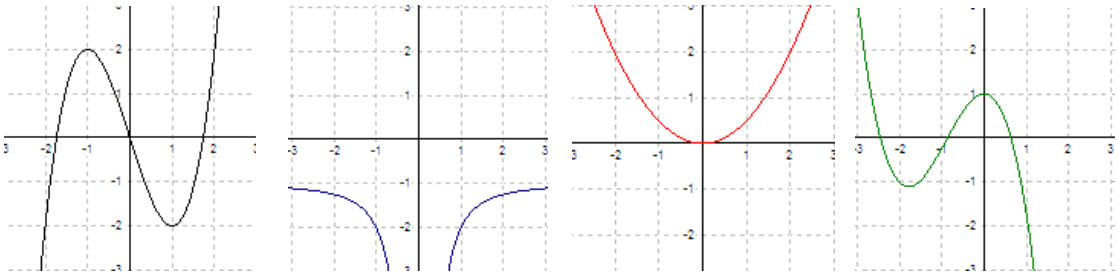
a) leia punktid, kus nende funktsioonide väärtused on võrdsed;
b) millistes punktides need graafikud lõikavad x-telge?
c) milliste argumendi *x* väärtuste korral kehtib võrratus $f(x)<g(x)$?
d) leia nende funktsioonide positiivsuspiirkonnad ja piirkond, kus mõlemad funktsioonid on positiivsed.

Antud ülesandes on kasutatud mittetraditsioonilisi küsimusi (leia lõikepunkt, nullkohad, positiivsuspiirkond ning lahenda võrratus). Juhin tähelepanu sõnale „Leidke“. Käsk ei ole üheselt mõistetav. Vastuse võib lugeda graafikult ja kontrollida selle õigsust funktsioonide võrranditega, kuid võib ka lahendada võrrandisüsteemi. Õpilastele tuleb kindlasti näidata mõlemat moodust ning juhtida tähelepanu, millistel juhtudel kumba lahendusviisi kasutada. Samuti on oluline teksti ümbersõnastamine. Õpilane peab suutma seda alguses õpetaja abiga ja hiljem iseseisvalt teha. Näiteks antud juhul: „millistes punktides need graafikud lõikavad $x-$telge“ tähendab ju „leia nullpunktid (mille poolest erineb nullkohast?)“. Piirkondade leidmisel ehk võrratuste lahendamisel on kasulik $x-$telge viirutada. Ka antud näite korral tekib sel moel joonisele ühine piirkond.

Kindlasti on tarvilik omandada paaris- ja paaritu funktsiooni mõiste pärast astmefunktsioonide graafikute joonestamist. Lahendada võiks ka nn äratundmisrõõmu ülesandeid.

Näide: Leia jooniselt 2 graafik, mis ei esita paaris- ega paaritut funktsiooni.

a) b) c) d)



Joonis 2.

Antud joonise kohta saab aga teisigi küsimusi esitada (Milline graafik esitab paarisfunktsiooni? Miks? jne).

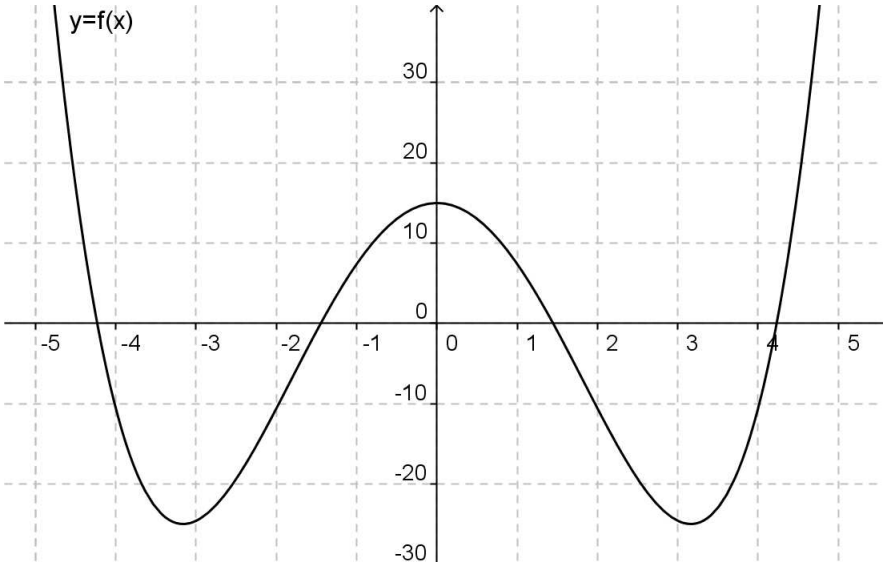
Et õpilastele jääks paarisfunktsiooni mõiste paremini silme ette, võib näiteks samasse teljestikku joonestada funktsioonide $y = 0{,}5x^4 - 2x^2$, $y = x^2 - 5$ ja $y = \frac{1}{x^2}$ graafikud (arvutil) ja leida nüüd graafikutele ühiseid omadusi. Tõepoolest, kõik graafikud on sümmeetrilised y – telje suhtes. Mida see tähendab? Et $f(x) = f(-x)$. Loodan, et õpilased märkavad – kõik muutujate astendajad on paaris. Segaduse tekitamiseks võib samasse teljestikku lisada ka $y = \cos x$ graafiku (NB! Kitsast kursusest tulijad tunnevad seda funktsiooni, laia kursuse omad mitte.). Astendaja pole paaris. Kas keegi oskab selgitada?

Paaris- ja paaritu funktsiooni tunnuste rakendamiseks sobib nutikamatele õpilastele järgmine ülesanne:

Leia funktsiooni $y = 5f(-a)[f(a) - 3g(-a)] - [g(-a)]^2$ väärtus, kui on teada, et $y = f(x)$ on paarisfunktsioon ja $y = g(x)$ on paaritu funktsioon ning $f(a) = 4$ ja $g(a) = 2$.

Loodan, et analoogseid ülesandeid ka õpikutesse jõuab.

Kui lasta uurida funktsiooni $f(x) = 0{,}4x^4 - 8x^2 + 15$, siis laia kursuse õppijad suudaksid ehk funktsiooni ligikaudsed nullkohad leida (kitsa matemaatika õppijatele käib see üle jõu), ning seejärel ka positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna, kuid rohkemat veel mitte. Selle tõttu on antud funktsiooni hea uurida graafikut ette andes (vt joonis 3).



Joonis 3.

Näiteks:

1. Mitu ekstreemumkohta on funktsioonil $f(x)$? Kirjuta need üles ja määra nende liik!
2. Leia funktsiooni $f(x)$ maksimum ja miinimum!
3. Leia funktsiooni $f(x)$ kasvamispiirkonnad!
4. Leia funktsiooni $f(x)$ nullkohad ja negatiivsuspiirkonnad!
5. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon? Põhjenda!

Klassis tuleb toonitada, et meie oskused on piiratud ja kahjuks lõpetame gümnaasiumi nii, et paljusid võrrandeid lahendada ei oskagi. Näiteks ei oska me leida funktsiooni $y = -x^4 + 4x + 2$ nullkohti ning peame piirduma arvutil joonestatud graafikult ligikaudsete lahendite lugemisega. Samas saame näidata, kui oluline on meie jaoks tehnika areng. Selle teema käsitlemisel võime õpilastel paluda otsida meediast huvitavat infot esitavaid graafikuid õppekava läbivate teemade („Keskkond ja jätkusuutlik areng“, „Tehnoloogia ja innovatsioon“, „Teabekeskkond“, „Tervis ja ohutus“) kohta ning nende analüüsimine tekitab õpilastes kindlasti huvi meid ümbritseva keskkonna vastu ja näitab matemaatika elulisust.

Avita kirjastuses ilmuvaid kitsa matemaatika õpikuid soovitan kindlasti uurida ka laia matemaatikat õpetades. Nendes õpikutes on iga teema alguses lähtetest ja seda on hea kasutada eelnevalt õpitu meeldetuletamiseks kas kodus või klassis. Laia matemaatikat saab põhimõtteliselt õpetada ka varem ilmunud õpikute järgi, tuleb ainult natuke rohkem jälgida ainekava.

Lõpetades teemat „Funktsioonid I“, soovitan kontrolltöös kasutada erinevaid sõnastusi arusaamistaseme kontrollimiseks. Samuti on tarvis lasta õpilastel ise funktsioonide graafikuid joonestada ja uurida, ning vastupidi – etteantud graafikuid uurida.

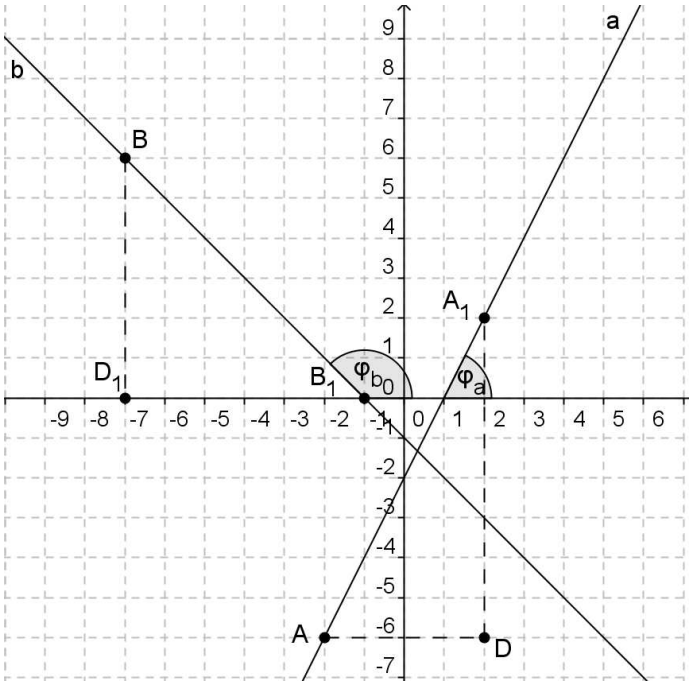
Jõuame funktsiooni uurimiseni tuletise abil.
Pärast kursuse „Funktsioonid II“ *läbimist suudab kitsa kursuse õpilane selgitada funktsiooni tuletise mõistet, funktsiooni graafiku puutuja mõistet, funktsiooni tuletise geomeetrilist tähendust, funktsiooni kasvamise ja kahanemise seost funktsiooni tuletisega, funktsiooni ekstreemumi mõistet ning ekstreemumi leidmise eeskirja. Õpilane oskab leida ainekavaga määratud funktsioonide tuletisi, koostab funktsiooni graafiku puutuja võrrandi antud punktis ning lahendab lihtsamaid ekstreemumülesandeid. Tänu tuletise mõiste omandamisele suudab õpilane nüüd leida lihtsamate funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud, maksimum- ja miinimumpunktid ning skitseerib nende järgi funktsiooni graafiku (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011).* Meeles tuleb pidada, et kitsas kursuses piirdutakse ruutvõrratusega, seega jääb ka tuletise abil uuritava funktsiooni „laeks“ kuupfunktsioon. Integraali õpitakse tundma 12. klassis 7. kursuses ning selle kohta võib lugeda käesoleva aineraamatu vastavat teemat käsitletavast Arvo Pressi artiklist.

Laia matemaatika 8. kursus „Funktsioonid II“ käsitleb eksponent- ja logaritmfunktsiooni, mille kohta on käesolevas aineraamatus Kalle Velskeri artikkel. 9. kursuse „Funktsiooni piirväärtus ja pidevus“ alguses käsitletakse trigonomeetrilisi funktsioone (vt. Hannes Juki artikkel käesolevast kogumikust) ja teises pooles jõutakse funktsiooni piirväärtuse ning tuletiseni. *Selle kursuse lõpus suudab õpilane selgitada funktsiooni piirväärtuse ja tuletise mõistet ning tuletise füüsikalist ja geomeetrilist tähendust, oskama tuletada funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletise leidmise eeskirju ning suutma neid ka funktsiooni esimese ja teise tuletise leidmisel rakendada. 10. kursuses „Tuletise rakendused“ hakkab õpilane eelmises kursuses omandatud tehnikat rakendama. Õpilane koostab funktsiooni graafiku puutuja võrrandi, leidma funktsiooni kasvamis-ja kahanemisvahemikke, ekstreemumeid, funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususvahemikke ning käänupunkte. Õpilane suudab selgitada funktsiooni kasvamise ja kahanemise seost funktsiooni tuletise märgiga. Õpilane saab aru ekstreemumi olemusest ning tunneb selle leidmise eeskirja. Nüüd suudab õpilane uurida funktsiooni täielikult ning saadud tulemuste põhjal funktsiooni graafikut skitseerida (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011).* Paljudel juhtudel on meil oluline uurida funktsiooni mingil lõigul. Näiteks nädala temperatuurigraafikul huvitab meid vaid

kolmapäeva oma või keha liikumist illustreerival graafikul ajavahemik 10-st 15-ni. Õpilane peab saama aru, mis on suurim ja vähim väärtus antud lõigul ning tundma selle leidmise eeskirja. Loomulikult tuleb lahendada ka rakendusliku sisuga ekstreemumülesandeid.

Alustaksin kitsast kursusest, sest siin jõutakse tuletise mõisteni ilma piirväärtust sisse toomata ja see on ehk mõnegi õpetaja jaoks uudne. Teema juurde asumiseks sobib kindlasti kõige paremini õpiku alguses olev lähtetest, vajadusel saab teadmisi meelde tuletada kordamiseks mõeldud lehekülgedelt. Õpetaja otsustab, kas klass on võimeline tegema seda kodus või tuleb seda teha klassis.

Funktsiooni tuletise juurde jõudmiseks alustame sirge tõusu ja tõusunurga tähenduse meeldetuletamisest. Joonisel 4 on sirged *a* ja *b*.

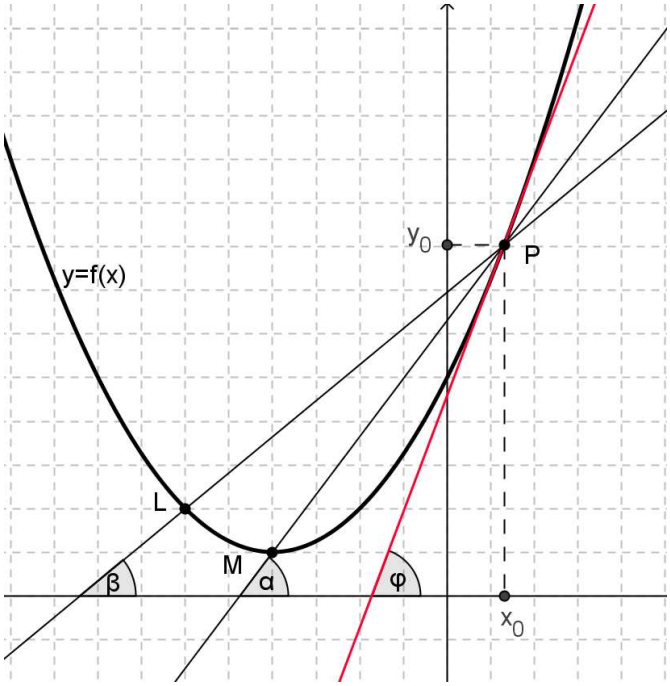


Joonis 4.

Kui jälgida sirget *a*, näeme, et punkti A liikumisel asendisse A_1 liigutakse piki *x*-telge 4 ühikut (AD) ja piki *y*-telge 8 ühikut (DA_1). Nende lõikude jagatist nimetatakse sirge *a* tõusuks ning tähistatakse tähega *k*. Sirge *a* tõus $k_a = \frac{8}{4} = 2$. Analoogselt saab näidata, et sirge *b* tõus $k_b = \frac{6}{-6} = -1$. Näeme, et tõusva sirge tõus on positiivne ja langeva sirge tõus negatiivne. Sirge tõusunurgaks φ nimetame positiivset nurka *x*-telje positiivse suuna ja sirge vahel.

Joonisel toodud sirgete tõusunurgad on vastavalt φ_a ja φ_b. Õpilased teavad varasemast, et tõus on võrdne tõusunurga tangensiga, st $k = \tan\varphi$. Näiteks sirge *b* tõusunurk on $\varphi_b = 135^\circ$.

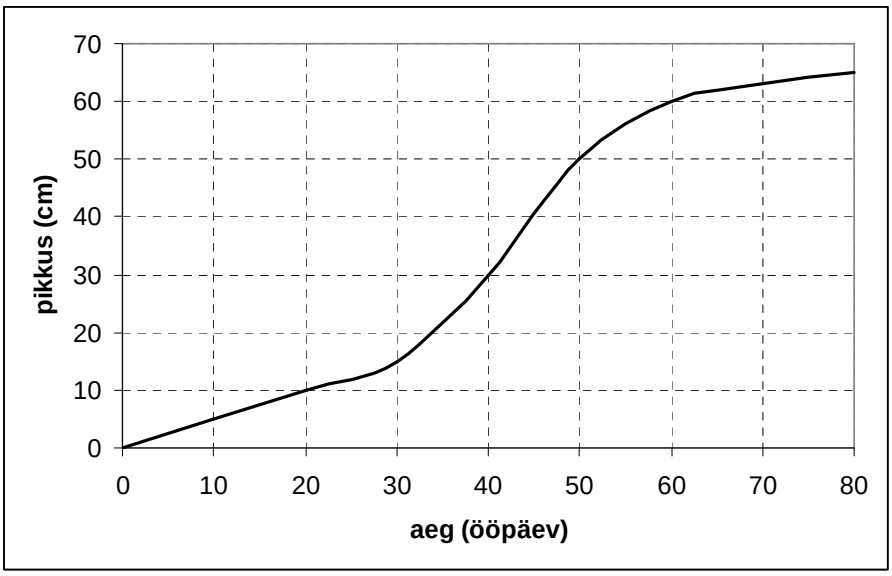
Valime funktsiooni $y = f(x)$ graafikul (vt joonis 5) punktid L ja P ning joonestame läbi nende punktide sirge (lõikaja), mille tõusunurk on β. Liigutame punkti L piki graafikut punkti P suunas. Selle liikumise tulemusena muutub ka lõikaja asend ning tõusunurk. Jõudes punktiga L punkti P, oleme saanud lõikajast puutuja, sest sirgel on funktsiooni graafikuga vaid üks ühine punkt, milleks on P. Seda sirget – lõikaja piirasendit – nimetatakse graafiku puutujaks punktis P. Lõikaja tõusunurgast on saanud puutuja tõusunurk.



Joonis 5.

Varasemast tunneme sirge võrrandit tõusu ja punkti kaudu. Seega saame antud joonisel esitatud funktsiooni puutuja võrrandi esitada kujul $y - y_0 = k(x - x_0)$, kus $k = \tan\varphi$ ja $P(x_0; y_0)$. Õpilased suudavad antud joonist kasutades puutuja võrrandi leida. Kui lugeda puutuja lõikepunktiks x-teljega punkt koordinaatidega (-1,7;0) ja võtta P(1,3;8), saame puutuja (kordajad ligikaudsed) $y = 2{,}7x + 4{,}5$.

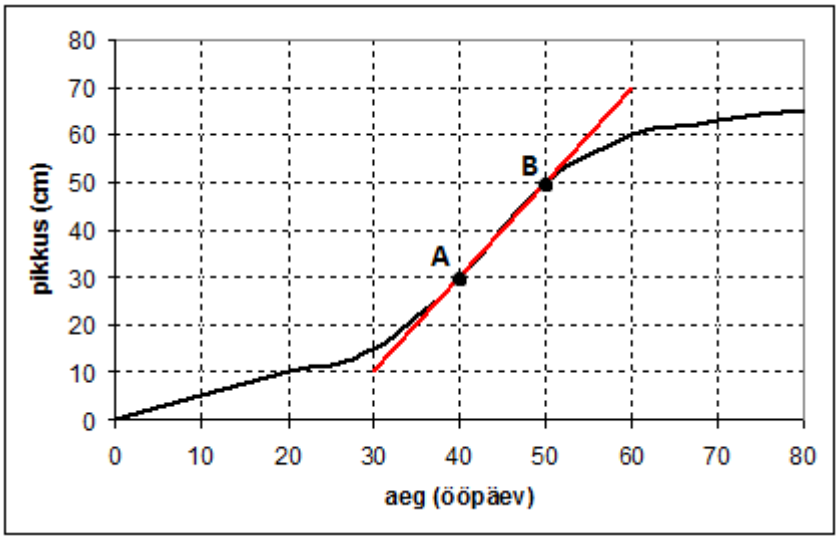
Näide: laboris uuriti ühe taime kasvamist 80 ööpäeva jooksul taime tärkamisest alates; taime kasvugraafik on toodud joonisel 6.



Joonis 6.

Selle graafiku kohta saab esitada palju joonise lugemise oskust puudutavaid küsimusi (lähtudes kursuses „Funktsioonid I“ õpitust). Õpilastega arutades peaks tähele panema, et kõige kiirem on kasv 40. ja 50. kasvupäeva vahel. Kuidas seda kasvamise kiirust iseloomustada? Mõistlik oleks leida, mitu sentimeetrit ühes ööpäevas taim kasvab.

Graafikult märkame, et antud ajavahemikus on kasvukõver peaaegu sirge ning selle sirge tõus on $\frac{50-30}{50-40}=2$ cm ööpäevas (vt joonis 7).



Joonis 7.

Nüüd võib arutleda edasi järgmiselt:

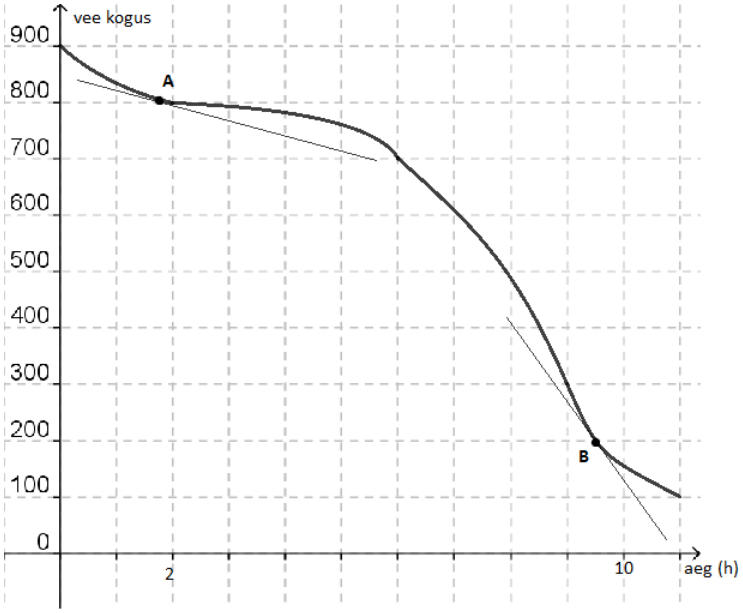
- Millise kiirusega kasvab taim esimese 20 päeva jooksul? Kui pikaks oleks ta kasvanud 80 päevaga, kui kasvukiirus oleks olnud sama?

- Kui pikaks oleks kasvanud taim, kui ta 80 päeva oleks kasvanud sama kiiresti kui 50. ja 60. päeva vahel?
- Graafikut vaadeldes näeme, et 60. kasvupäevast alates graafiku tõusu kiirus oluliselt väheneb. Mida see tähendab? Kui suur on nüüd kasvukiirus? Kuidas seda leida?

Selliselt analüüsides ja sirgeid/puutujaid joonestades jõuame järeldusele, et kasvukõvera tõusu illustreerib hästi vastavas punktis kõverale tõmmatud puutuja tõus.

Vaatleme teist näidet.

Asula veetorni paak oli kesköö ääreni täis. Elektrikatkestuse tõttu, mis kestis 11 tundi, pumbad ei töötanud ja vett paaki juurde ei pumbatud. Joonisel 8 esitatud graafik kirjeldab veekoguse vähenemist kesköösst kella 11-ni.



Joonis 8.

Alustuseks saab õpilastele esitada palju elulisi küsimusi, nt „Millal tarbitakse vett rohkem?“, „Kuidas seletada, et suurem vee tarbimine lõpeb kell 2 öösel?“, „Kui palju tarbitakse vett ajavahemikus 6.00 – 9.30?“ jne.

Kui uurida, millise kiirusega tühjenes veetorn kell 1.45 öösel või kell 9.30 hommikul, siis peame kasutama puutujate abi, nagu joonisel näidatud. Juhime õpilaste tähelepanu sellele, et tõus on negatiivne ja tähendab tegelikult langust. Muutumiskõvera kasvu kiirust selle üksikutes punktides võime kirjeldada graafiku neis punktides tõmmatud puutujate tõusudega.

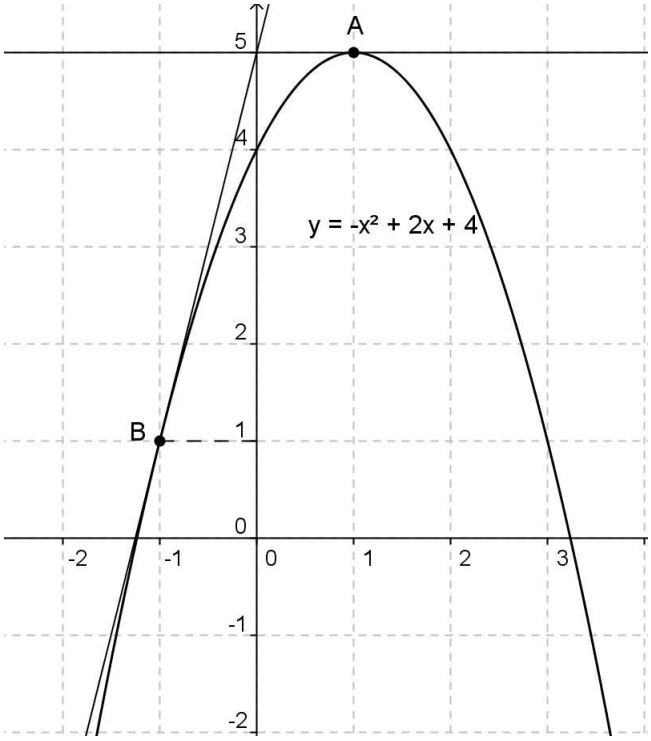
Et õpilane mõistaks, et funktsiooni muutumise kiirus on sama, mis funktsiooni graafiku puutuja tõus, tuleb lahendada sellekohaseid ülesandeid. Näiteks: leia funktsiooni graafiku puutuja võrrand:

a) punktis (0; -3), kus funktsiooni muutumise kiirus on 4;
b) punktis (4, -2), kus graafiku puutuja tõus on -3.

Siin on hea lasta õpilastel kodus meediast üks graafik otsida ning selle kohta ülesanne koostada. Järgmisel päeval võib ta selle pinginaabrile lahendada anda ning lõpuks koguneb õpetajale eluliste ülesannete pank.

Piisava koguse graafikute uurimise järel jõutakse funktsiooni tuletise mõisteni. Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõusu kohal *x* nimetatakse selle funktsiooni tuletiseks kohal *x*. Tuuakse sisse tuletise tähis. $y' = f'(x) = k_{puutuja}$. Seda seost tuleb aina kinnistada, kasutades nii jooniseid kui puutuja võrrandeid.

Näiteks saame jooniselt 9: kui $x = 1$, siis $k = 0$ ja $f'(1) = 0$ ning kui $x = -1$, siis $k = 4$ ja $f'(-1) = 4$.

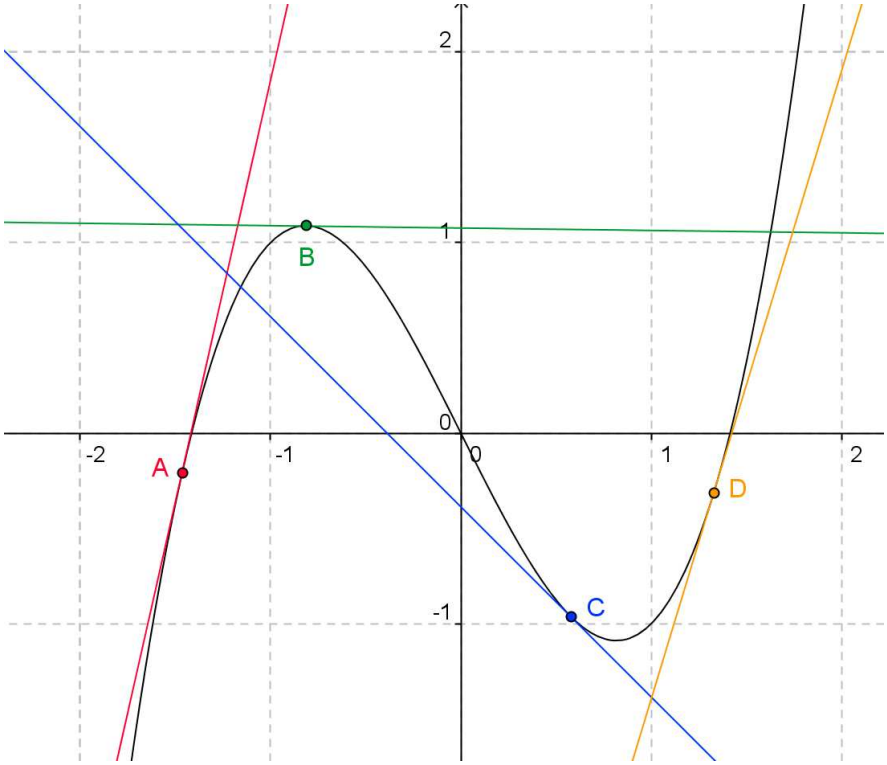


Joonis 9.

Samu teadmisi nõuab ka ülesanne:

Funktsiooni $y = f(x)$ graafikule on joonestatud punktis A(1;2) puutuja. Puutuja võrrand on $y = 3x - 1$. Leia selle puutuja tõus, tõusunurk, funktsiooni tuletis kohal $x = 1$ ja funktsiooni muutumise kiirus sellel kohal. Arvutada pole ju midagi, peab vaid tõlgendama. Nii saamegi, et tõus on 3, tõusunurk $\approx 71{,}6^\circ$, tuletise väärtus kohal 1 on 3 ja funktsiooni muutumise kiirus sellel kohal on samuti 3.

Kitsas matemaatikas piirdutakse funktsioonide $y = c$, $y = x^n$ $(n \in Z)$, $y = e^x$ ja $y = \ln x$ tuletistega. Leitakse ka funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis. Et jõuda funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmiseni, tuleb arvutil konstrueerida mingi funktsiooni $y = f(x)$ graafik ning näidata sellel ühe puutuja käitumist, liikudes puutepunktiga mööda graafikut (vt joonis 10).



Joonis 10.

Vaadeldes ka kõiki eelnevalt kasutatud jooniseid, jõutakse järeldusele, et funktsiooni kasvamispiirkondades on funktsiooni tuletis positiivne ja kahanemispiirkondades on tuletis negatiivne. Funktsiooni ekstreemumkohtades on funktsiooni tuletis võrdne nulliga. Siin on oluline toonitada, et kui koht x_0 on ekstreemumkoht, siis $f'(x_0) = 0$. Vastupidine ei pruugi kehtida. Näiteks funktsiooni $y = x^3 + 2$ tuletis kohal $x_0 = 0$ on tõesti võrdne nulliga, kuid tegemist pole ekstreemumkohaga. Põhjendamiseks on hea kasutada arvutil konstrueeritud graafikut ning näidata, et selles kohas ei toimu üleminekut kasvamiselt kahanemisele ega vastupidi. Funktsioon on kogu ulatuses kasvav.

Nüüd on õpilane omandanud baasteadmised funktsiooni uurimiseks tuletise abil. Ekstreemumkohtade liigi määramiseks näeb uus ainekava ette ka funktsiooni teise tuletise leidmise ja rakendamise oskust. See ei nõua küll palju aega ja õpilased saavad üldjuhul hakkama, kuid arusaamise kohalt on minu arvates olulisem ikka tuletisfunktsiooni graafikut jälgida.

Laia matemaatika kursuses jõutakse funktsiooni tuletiseni piirväärtuse kasutamise abil. Kuna selline käsitlus on meil juba pikka aega toimunud, siis pikemalt sellel ei peatu. Küll on tarvis tähele panna, et kõik elementaarfunktsioonide tuletised ja tuletise leidmise eeskirjad tuletakse – ja õpilane peab suutma seda ka iseseisvalt teha. Tarvis on omandada lihtsamate liitfunktsioonide tuletise leidmise reegel. Seda oskust vajavad õpilased kõrgkoolis. 9. kursus piirdub tuletise leidmise oskuse omandamisega.

10. kursus kannab pealkirja „Tuletise rakendused“. Selle kursuse peamisteks teemadeks on funktsiooni graafikule puutuja võrrandi koostamine, funktsiooni graafiku täielik ja osaline uurimine ning ekstreemumülesannete lahendamine. Minu arvates on oluline luua funktsiooni uurimises süsteem:

I etapp

Nullkohas $f(x)=0$; positiivsuspiirkonnas $f(x)>0$; negatiivsuspiirkonnas $f(x)<0$.

II etapp

Ekstreemumkohas $f'(x)=0$; kasvamispiirkonnas $f'(x)>0$; kahanemispiirkonnas $f'(x)<0$.

Siin tuleb arvestada, et ekstreemumkohas peab tuletis muutma märki (st toimub üleminek kasvamiselt kahanemisele või vastupidi). Lisaks peab tähele panema, mida küsitakse: kas ekstreemumkohta, ekstreemumit või ekstreemumpunkti ning kas tuleb neid ka liigitada.

III etapp

Käänukohas $f''(x)=0$; kumeruspiirkonnas $f''(x)<0$; nõgususpiirkonnas $f''(x)>0$.

Nüüd on võimalik uurida mõningaid funktsioone täies mahus ja mõningaid osaliselt. Siiani toimunud riigieksamite töid analüüsides märgati, et paljudel juhtudel teevad õpilased liigseid tehteid, sest ei loe korralikult teksti.

Näiteks järgmine ülesanne.

Arvutage funktsiooni $y=x^3-4x$ nullkohad ja maksimum- ning miinimumpunkti koordinaadid. Joonestage samas teljestikus funktsioonide $y=x^3-4x$ ja $y=x^2-1$ graafikud. Kirjutage välja vahemik, kus mõlemad funktsioonid kasvavad üheaegselt.

Mis siis tuleb teha? Kõigepealt lahendada vastav võrrand nullkohtade leidmiseks. Seejärel leida funktsiooni tuletis ja lahendada vastav võrrand ekstreemumkohtade leidmiseks. Ekstreemumkohtade liigi määramiseks võib kasutada tuletise graafiku visandamist või arvutada lihtsalt ekstreemumid ning teades, et pideva funktsiooni puhul on maksimum suurem kui miinimum, kirjutada välja nõutud punktide koordinaadid. Graafikute visandamisel

kasutada ära juba leitud andmed. Esimese funktsiooni jaoks on punkte piisavalt, teise jaoks piisab nullkohtadest ja haripunktist. Viimasele küsimusele saab vastata jooniselt lugedes.

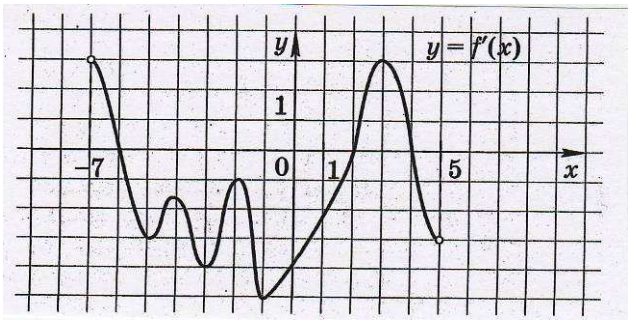
Põhimõtteliselt lihtne ülesanne, kahjuks pole ekstreemumpunktide koordinaadid täpsete vastuste andmiseks just parimad. Kuna joonisele kandmiseks kasutatakse ju ligikaudseid väärtusi, siis ongi kasulik need ligikaudsete kümnendmurdudena esitada. Eksamitöödes tuli tihti ette, et õpilane oli esitanud täisuurimise. Sel moel kulutas ta mõttetult aega. Matemaatika on täppisteadus ning õpilasi tuleb õpetada teksti hoolikalt lugema ja endale arusaadavate käskudena ümber sõnastama.

Kindlasti on ka laias kursuses tarvis tegelda osalise uurimisega ja näidata, et mõningaid võrrandeid me lahendada ei oska ning peame kasutama arvutil saadud funktsioonide graafikuid.

Mõistetest arusaamist saab kontrollida järgmise ülesandega:

Leia funktsiooni $f'(x)$ graafiku (joonis 11) abil funktsiooni $f(x)$:

a) kasvamisvahemike arv,
b) kahanemisvahemikud,
c) ekstreemumpunktide arv,
d) miinimumkohad,
e) maksimumkohad.

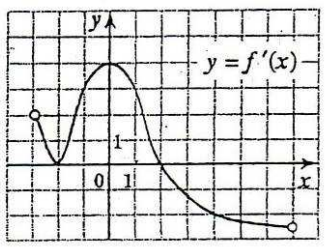


Joonis 11.

Funktsiooni tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks on puutuja tõus. Ei piisa, kui teatakse, et $k = f'(x_0)$. Oluline on sellest arusaamine.

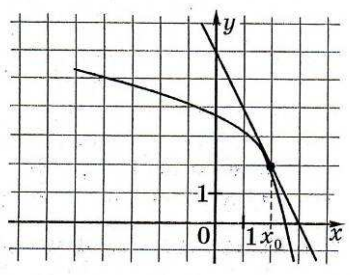
Näiteks:

a) Leia antud tuletisfunktsiooni graafiku abil puutuja tõusu punktis, mille abstsiss on 4.



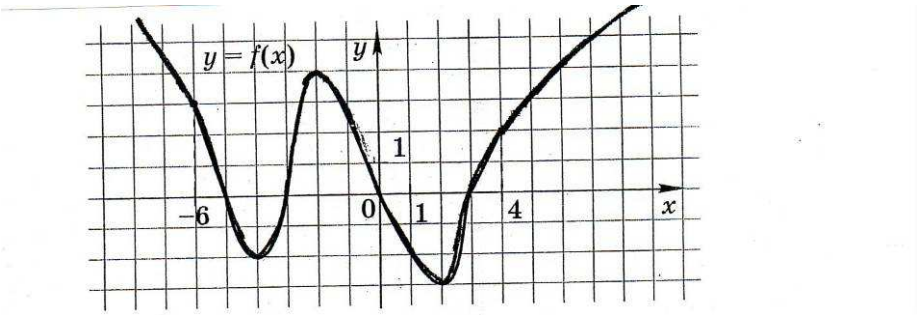
Joonis 12.

b) Leia tuletise väärtust kohal x_0.



Joonis 13.

Lahendada võrrand $f'(x) = 0$ joonisel 14 esitatud funktsiooni graafikut kasutades.



Joonis 14.

Kui kitsas kursuses koostab õpilane funktsiooni graafiku puutuja võrrandi antud punktis, siis laias kursuses peab õpilane suutma seda teha kolmel moel: puutepunkti abstsissi, puutepunkti ordinaati või puutuja tõusu teades.

Tublimatele õpilastele võib pakkuda ka rohkem mõtlemist vajavaid ülesandeid puutujate võrrandite ja parameetrite leidmise kohta.

Näide 1. Millise *a* väärtuse korral on sirge $y = 3x - 2$ funktsiooni $y = x^2 + ax + 2$ graafiku puutujaks? Näiteid abistavate küsimuste kohta:

- Mitu ühist punkti on?
- Mida tähendab sõna „puutub“?
- Leia näiteid puutumise kohta!

Näide 2. Kirjuta funktsiooni $y = x^2 - 3x + 1$ kõigi puutujate võrrandid, mis läbivad punkti M(2;-2). Märkus: puutepunktide abstsissi *t* leidmiseks võib kasuta valemit $y_0 - f(t) = f'(t)(x_0 - t)$ või puutuja tõusu erineval moel kirjutades ise selleni jõuda.

Näide 3. Kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ graafiku ekstreemumpunktid on A(0; 2) ja B(4; 34). Leia kordajad *a, b, c ja d.* Abistavaid küsimusi:

- Millal asub punkt antud joonel?
- Mis on ekstreemumkoha tingimus?

Funktsiooni tuletist kasutame ekstreemumülesannete lahendamisel. Kitsas kursuses soovitan jääda õpikus toodud ülesannete raskustaseme juurde. Laias kursuses on ülesanded raskemad ja mitmekesisemad. Ka ekstreemumülesande lahendamise saab jagada etappideks.

1. Mida küsitakse (kirjuta valem või koosta seos selle leidmiseks; märka, et sul on kaks muutujat)?

2. Teisenda saadud seos ühe muutujaga funktsiooniks (loe uuesti teksti, vaata joonist, avalda üks muutuja teise kaudu).
3. Leia saadud funktsiooni ekstreemumkoht. Põhjenda saadud lahendi õigsust (kontrolli)!
4. Kirjuta vastus (loe enne veelkord teksti ja vasta küsimusele).

Õpilaste jaoks osutuvad kõige keerulisemateks ekstreemumülesanneteks kujundite sarnasusele tuginevad planimeetria- ja stereomeetriaülesanded, sest vajalikud eelteadmised on küll põhikoolis omandatud, kuid kahjuks ka ununenud.

Näiteks: Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 24 cm ja üks teravnurk 60°. Sellesse kolmnurka on kujundatud ristkülik, mille üks külg paikneb hüpotenuusil. Millised peavad olema ristküliku mõõtmed, et pindala oleks suurim?

Abistavaid vihjeid:

- Visanda joonis!
- Märka, et täisnurkses kolmnurgas oskad leida kõiki külgi ja kõrgust!
- Mida sul tegelikult on tarvis?
- Tähista ristküliku küljed ja kirjuta välja nõutav seos!
- Seo omavahel ristküliku küljed!
- Lahenda ekstreemumülesanne!

Antud teemade käsitlemisega arendame õpilase matemaatikapädevust. Ta peab mõistma ja analüüsima matemaatilisi tekste, esitama oma mõttekäiku nii suuliselt kui kirjalikult, arutlema loovalt ja loogiliselt, püstitama probleeme ja leidma nende lahendamiseks sobivaid strateegiaid, mõistma ümbritsevas maailmas valitsevaid seoseid ning tõlgendama erinevaid matemaatilise info esitamise viise.

Kokkuvõtteks tuleb öelda, et funktsioonide graafikute uurimine on väga oluline ja eluliste ülesannetega seotuv. Funktsiooni uurimisel tuletise abil nii kitsa kui laia matemaatika kursuses saab määravaks võrrandite ja võrratuste lahendamise oskus (näiteks kitsas matemaatikas kuupfunktsioonist keerulisemate funktsioonideni minna ei saa, sest osatakse lahendada vaid ruutvõrratust). Näitlikustamiseks saab kasutada arvutiprogrammide abi ning kolleegide valmistatud materjale leiab matemaatikaõpetajate virtuaalse võrgustiku kodulehelt: http://mott.edu.ee ja Koolielust aadressil:
http://koolielu.ee/pg/waramu/browse2/curriculumSubject/79096437

Kasutatud kirjandus:

1. Levin, A., Tõnso, T., Veelmaa, A. (1995). Matemaatika XI klassile. Tallinn: Mathema.
2. Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2002). Matemaatika 11. klassile. Tallinn: Koolibri.
3. Afanasjeva, H., Afanasjev, J. (2012). Gümnaasiumi kitsas matemaatika V. Funktsioonid I, Tallinn: Avita.
4. Afanasjeva, H., Afanasjev, J. (2012). Gümnaasiumi kitsas matemaatika VI. Funktsioonid II, Tallinn: Avita.
5. Joost, M., Orav, K., Kiisel, H. (2008). Mõned mõtted funktsioonide õpetamisest. Koolimatemaatika XXXV. EMS, Tartu.
6. Gümnaasiumi õppekava (2011). URL https://www.riigiteataja.ee/akt/114012011002
7. Veelmaa, A. (2010). Funktsioonide õpetamisest põhikooli matemaatikakursuses. Põhikooli valdkonnaraamat Matemaatika. URL http://www.oppekava.ee/index.php/Põhikooli_valdkonnaraamat_MATEMAATIKA