Näiteid võimalustest, kuidas suurendada huvi matemaatika vastu, huvi õpingute jätkamise ning ainega seotud elukutsete vastu

Helen Kaasik, Villu Raja, Tallinna Reaalkool

Huvi matemaatika vastu on võimalik suurendada nii ainetundides kui ka väljaspool tunde. Hea oleks alustada võimalikult vara (algklassides), aga võib alustada ka põhikooli teises astmes. Kui eesmärgiks on õpilase osalemine olümpiaadidel, siis peaks lisaülesandeid lahendama hiljemalt 7. või 8. klassis. Loomulikult võib alustada lisaülesannete lahendamist ka gümnaasiumis. Ainetundides saab põhiliselt lahendada suurema raskusastmega, kuid teemale vastavaid ülesandeid ning mõnikord ka loogilist mõtlemist vajavaid lisaülesandeid; nn olümpiaadiülesannete lahendamiseks tuleks leida aega väljaspool tunde. Võimalik on kasutada valiktunde või ringitunde, kus osalevad ainult matemaatikast huvitatud õpilased. Kui konkreetsest klassist tahavad matemaatikaga süvendatult tegeleda vähesed, võiks nendega kokku leppida eraldi konsultatsiooniajad. Õpilasi saab suunata ka iseseisvalt olümpiaadiülesandeid lahendama – sellisel juhul peaks õpetajapoolne eeltöö olema põhjalik. Neid, kes on võimelised iseseisvalt (või vanemate abiga) ülesandeid lahendama, võiks suunata osa võtma TÜ teaduskooli tööst. Tundide sisukamaks muutmiseks võib kutsuda ülesandeid lahendama külalislektoreid TÜ teaduskoolist või mujalt.

Videoloengud on tänapäevane võimalus muuta tunde vaheldusrikkamaks. Odav ja lihtsalt kasutatav tarkvara on näiteks *Adobe Connectpro 2*. See võimaldab õppejõul pidada loenguid interneti vahendusel või edastada õpilastele ettevalmistatud salvestusi. Sellekohaseid loenguid leiate näiteks Tallinna Reaalkooli kodulehelt. Klassikalist õpetamisprotsessi ei ületa muidugi ükski tehniline vahend, aga videoloengutel on kaks olulist eelist: esiteks võimaldab tarkvara õpilastel kuulata ühte õppejõudu mitmes klassis/koolis korraga (kuni 100 ühendust); teiseks on esitluse salvestamise võimalus. Tehniliselt või ka visuaalselt keerulise ülesande lahenduse vahetu ettekandmine on tihti vaevarikas või siis lausa võimatu. Kui salvestusi koguneb palju ning need on süstematiseeritud ja lihtsalt kättesaadavad, siis kergendab see nii mõnegi tunni läbiviimist.

Iga huvitav fakt arvude või matemaatikute elulugude kohta aitab tekitada huvi ka matemaatika enese vastu. Asjakohase jutukese või fakti sissetoomine teeb igapäevase õppeöö lihtsamaks ning lõbusamaks. Siinjuures soovitaks kasutada sellised trükiseid: „Numbriraamat“ (Tim

Glynne-Jones, 2009) ja „Arvude sümboolika“ (Pentti Lempiäinen, 1996). Matemaatikute elulugusid ja pilte leidub internetis suurel hulgal. Tunnis piisab mõne pildi näitamisest – see muudab matemaatika inimlikumaks, inimeste poolt loodud teaduseks. Kui lisada veel üllatavaid eluloolisi fakte (nt kuulus kreeklane Pythagoras tegutses hoopis Itaalias), siis on õpilaste huvi selleks korraks tagatud. Hästi korrastatud alfabeetilises järjestuses elulugusid leiab aadressilt *http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/*.

Õppetöö mitmekesistamiseks võib organiseerida matemaatikalaagreid, mille töösse saab kaasata külalislektoreid. Laagris on võimalik lahendada ülesandeid individuaalselt, kuulata teiste õpilaste ettekandeid ja selgitusi, organiseerida ülesannete lahendamise võistlusi jmt. Huvitavaks meetodiks on rakendada 5. – 6. klasside õpilaste juhendamisel matemaatika õpetamisest huvitatud gümnaasiumiõpilasi. Näiteks Tallinna Prantsuse Lütseumis, Tallinna Reaalkoolis ja Vanalinna Hariduskolleegiumis on edukalt kasutatud gümnaasiumiõpilaste oskusi ning võimekust Nuputa võistkondade ettevalmistamisel. Juhendavad õpilased saavad oma esimese positiivse pedagoogilise kogemuse, mis tekitab neis tahtmise siduda oma tulevik matemaatikaõpetaja elukutsega.

Väga tähtis on valik- ja ringitundide ettevalmistus. Kergem on õpetajatel, kes on aastakümneid materjale kogunud. Matemaatikas saab ju lahendada ka näiteks 100 aastat varem ilmunud ülesandeid. Põhiliselt kasutatakse siiski viimase 20 aasta materjale. Kõige olulisem on tunni planeerimisel mõista tegevuse eesmärke. Olümpiaadideks valmistuvad õpilased teevad enamuse tööst paratamatult iseseisvalt ja raskemate olümpiaadiülesannete lahendamine on mõttekas vaid siis, kui tegemist on vastavate huvide ning võimetega õpilaste grupiga. Järgnevalt anname mõned soovitused, kust otsida materjali ning milliseid teemasid võiks õpetada matemaatikast huvitatud õpilastele.

Olümpiaadideks valmistuvatele õpilastele on asendamatuks abimeheks Tartu Ülikooli Teaduskooli koduleht. Matemaatika õppematerjalide nimekiri on samas ka hea spikker individuaalsele õppijale. Materjalid on saadaval aadressilt *http://www.teaduskool.ut.ee/477*. Olümpiaadiülesandeid leidub internetiavarustes palju, aga paraku on vastavad kodulehed tihti korrastamata või muutub aadress sedavõrd tihti, et nende jälitamine on täiskohaga töö. Positiivseks näiteks on Oleg Košiku suurepärane matemaatikaolümpiaadide koduleht *http://www.math.olympiaadid.ut.ee/html/?id=avaleht*.Soovitame kasutada seal olevat viidete

kataloogi. Lisaks eelnevale soovitame veel kaht viita. Esiteks Saksamaa olümpiaadide ametliku kodulehe aadressi *http://www.mathematik-olympiaden.de/*, Teiseks haridusühenduse МЦНМО ja Moskva 57. Kooli koostöös peetavat kodulehte *http://www.problems.ru/*. Mõlemad paistavad silma erakordse korrastatuse ning sisutihedusega.

Matemaatika rühmatundides või ka eriklasside tundides osaleb õpilasi, kes spetsiaalselt olümpiaadidega ei tegele, kuid tunnevad sügavamat huvi matemaatika vastu. Seega peaks õpetaja üksikülesannete lahendamise asemel keskenduma tervikteemadele. Need tuleks omakorda valida sellised, et ka eriti andekatel oleks tunnis huvitav. Alljärgnevalt on esitatud klasside kaupa soovituslikud lisateemad ja kirjandus koos artikli autorite kommentaaridega.

10. klass

Arvuteooria (jaguvused) on olümpiaadideks valmistuvate õpilaste teema. N. Kostrikina kirjutatud õpik on mõeldud just põhikooli viimaste klasside olümpiaade silmas pidades ning sobib parajasti 10. klassi rühmatundidesse. „Mathematik in Aufgaben“ on Saksamaa õpetajate seas populaarne olümpiaadiülesannete kogu, millest võib leida muudki peale arvuteooria ülesannete. Teoreetilist materjali saate R. Vilt´i brošüürist „Jaguvused“:

- R. Vilt „Jaguvused“ *http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=447/Jaguvus.pdf*
- Н. П. Кострикина „Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов“, Москва „Просвещение“, 1991;
- W. Engel, U. Pirl „Mathematik in Aufgaben“, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1990;
- E. Mitt, O. Prinits, K. Velsker „Matemaatika olümpiaadid Eesti NSV-s“, kirjastus „Valgus“ 1970;
- E. Mitt, A. Raudsepp „Matemaatikaolümpiaadid Eesti NSV-s II“, kirjastus „Valgus“ 1985;
- E. Abel, L. Lepmann, E. Mitt, G. Olenev „Matemaatikaolümpiaadid Eestis III“, kirjastus „Valgus“ 1991.

Arvuteooria, kongruentsid on enamiku õpilaste jaoks keeruline teema. Tugevamatele õpilastele on kongruentside teooria väga tõhus relv arvuteooria ülesannete lahendamisel.

- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983.

Matemaatiline induktsioon on matemaatilises mõttes väga tähtis tõestusmeetod, seega mingil tasemel tähtis igale nutikale õpilasele.

- Jaan Reimand „Matemaatiline induktsioon“ *http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=470/MATEMIND.teooria+%FClesanneteta.pdf*
- L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Koolibri“ 1995;
- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983.

Kompleksarvud. Kompleksarvude teooria algmõisted on vajalikud algebraliste võrrandite lahendamisel.

- Ahto Lõhmus „Hulkliikmetest ja algebralistest võrranditest“ Tallinn „Valgus“ 1991.

Polünoomid ja algebralised võrrandid on teema, mida võiks käsitleda kõikides laia matemaatikat õppivates klassides. Võrrandite lahendamise oskus ongi tähtsaim tehniline oskus 10. klassis. Ahto Lõhmuse suurepärast brošüüri „Hulkliikmetest ja algebralistest võrranditest“ soovitame igale õpilastele, kes ei orienteeru olümpiaadidele, kuid tunnevad sügavamat huvi matemaatika vastu. Trükist sobib kasutada lausa tund tunni järel. Tõsi, kogu brošüüri läbimiseks vajalikud eelteadmised on pärit nii 10. klassist kui ka 11. klassist. Kümnendas klassis õpetamiseks on sobimatu kõik tuletisega seonduv, st jaotised 2.6, 2.7 ja 3.6.2, mis tuleks jätta 11.klassi.

- A. Lõhmus „Hulkliikmetest ja algebralistest võrranditest“ Tallinn „Valgus“ 1991;
- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983 III peatükk;
- E. Tamme „Algebraliste võrrandite lahendamisest“ *http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=458/ALGEBRALISTE+V%D5RRANDITE+LAHENDAMISEST%28%FClesanneteta%29.pdf*

Parameetreid sisaldavate võrranditega puutuvad õpilased kokku juba põhikoolis. Hiljem leiame teema 10. klassi õpikutest. Paraku jääb parameetritega seonduv käsitluse järjekindlusetuse tõttu õpilastele segaseks ning nii mõnigi õpetaja väldib parameetritega võrrandeid. Internetis on saadaval Lea Lepmanni väga hea õppematerjal „Parameetritega võrrandid“, mille abil saab sisutiheda ja järjekindla käsitluse nendest võrranditest. Nimetatud materjal sobib ka iseseisvaks õppimiseks.

- Lea Lepmann „Parameetritega võrrandid“

http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=472/parameetriga_vorrandid_.pdf

- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983;
- T. Tõnso, A. Veelmaa „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Mathema“, 1998;
- L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Koolibri“ 1995.

Võrratuste tõestamine. 10. klassis võib piirduda vaid juhtumiga, kus võrratuse üks pool teisendub ilmselt positiivseks suuruseks. Keerulisemaid võrratuste tõestusmeetodeid käsitleb Jan Willemsoni ja Indrek Zolki brošüür „Võrratused“.

- T. Tõnso, A. Veelmaa „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Mathema“, 1998;
- L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Koolibri“ 1995;
- J. Willemson, I. Zolk „Võrratused“ Tartu:Tartu Ülikool, 2003.

Diofantilised võrrandid:

- L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker „Matemaatika X klassile“, kirjastus „Koolibri“ 1995;
- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983.

11. klass

Funktsioonide üldised omadused. Õpilaste jaoks on üleminek konkreetsetelt funktsioonidelt üldisele funktsiooni mõistele raske. Harjumine võtab aega. Sobivaid ülesandeid funktsiooni üldtähisele leiate näiteks Kalju Kallaste ülesannete kogust.

- K. Kallaste „Valikülesannete kogu gümnaasiumile“, kirjastus „Koolibri“, 2001

Võrratuste tõestamise raskemad võtted (Cauchy võrratus). Temaatika on loomulikult pühendatud olümpiaadidele, aga Cauchy võrratuse kasutamine lihtsamates tõestusülesannetes on iga nutika õpilase poolt omandatav.

- J. Willemson, I. Zolk „Võrratused“ Tartu:Tartu Ülikool, 2003.

Logaritm- ja eksponentvõrrandid ning -võrratused on üks 11. klassi põhiteemadest, mida tuleb käsitleda põhjalikult. Logaritmide abil võetakse hiljem näiteks piirväärtusi kui ka tuletisi. Soovitame siinkohal Ukraina koolimatemaatika tipptegija M. I. Skanavi kaheksaosalist ülesannetekogu. See mahukas raamatute sari sisaldab kõiki olulisi

gümnaasiumi teemasid ning on varustatud vastuste ja näidislahendustega. Logaritme käsitletakse sarja 2. osas. Häid ülesandeid leiate ka mitmetest eestikeelsetest ülesannetekogudest.

- H. Keerutaja, K. Kruse, l. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX – XI klassile“, kirjastus „Valgus“ 1983;
- K. Kallaste „Valikülesannete kogu gümnaasiumile“, kirjastus „Koolibri“, 2001;
- М. И. Сканави „Решебник всех конкурсных задач по математике II“, Киев 1993;
- E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt „Matemaatika ülesannete kogu keskkool“, kirjastus „Valgus“, 1990.

Trigonomeetria on logaritmide järel teine suurem teema. Õpikutele lisaks on siin välja pakkuda Kaljo Kruse ja Ove Karu brošüür „Matemaatika klassiväliseks tööks keskkoolis“. Trükises käsitletakse muuhulgas erinevaid trigonomeetriliste võrrandite ja võrratuste lahendusvõtteid. Eriliselt hinnalised on juhised trigonomeetriliste võrrandite lahendite kontrollimise kohta.

- O. Karu, K. Kruse „Matemaatika klassiväliseks tööks keskkoolis“, kirjastus „Koolibri“, 1991;
- K. Velsker „Trigonomeetriliste võrrandite lahendamisest“ *http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=475/trigonomeetrilised_vorrandid_.pdf*

Funktsiooni piirväärtus on koolimatemaatikas seni alatähtsustatud ja süsteemitult käsitletud teema. Osa määramatuste tüüpidest jäävadki kaadrist välja. Samas on võimalik anda piisavalt lihtne ja peaaegu ammendav ülevaade erinevatest piirväärtuse leidmise võtetest. Piirväärtuse käsitlemiseks soovitame brošüüri:

- E. Jürimäe, E. Reimers „Matemaatilise analüüsi praktikum I“, TRÜ 1983.

Tuletise rakendused, ekstreemumülesanded on väga huvitav ja eluline teema. Kahjuks pole siin peale kooliõpikute head teoreetilist kirjandust pakkuda. Küll leidub aga häid ülesannetekogusid:

- K. Kallaste „Valikülesannete kogu gümnaasiumile“, kirjastus „Koolibri“, 2001;
- V. Luigelaht, E. Reiman „Matemaatika ülesannete kogu“, kirjastus „Valgus“, 1995;
- М. И. Сканави „Решебник всех конкурсных задач по математике III“, Киев 1993.

12. klass

Integreerimise erivõtted:

- N. Piskunov „Diferentsiaal- ja integraalarvutus I“, kirjastus „Valgus“, 1965.

Integraali rakendused:

- H. Afanasjev „Integraal“ *http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=466/Integraal%28uus%29internetiks.pdf*

Geomeetria:

- O. Karu, K. Kruse „Matemaatika klassiväliseks tööks keskkoolis“, kirjastus „Koolibri“, 1991.

Stereomeetria:

- L. Tuulmets, K. Koitmets „Hulktahukad“ http://www.teaduskool.ut.ee/orb.aw/class=file/action=preview/id=465/Hulktahukad+0607.pdf.