IKT vahendite kasutamisest gümnaasiumi matemaatikakursuste õpetamisel

Allar Veelmaa, Loo Keskkool

Gümnaasiumi riiklik õppekava[1] (edaspidi GRÕK) järgi võib õpilane valida kitsa ja laia matemaatikakursuse vahel. Kursused erinevad üksteisest nii sisu kui ka õpetamisele kuluva aja poolest. Mõlema kursuse jaoks on ühine see, et nende õpetamisel on vaja kasutada kaasaegseid IKT vahendeid.

GRÕK-is (lisa 3) on punktis 1.6 kirja pandud nõuded füüsilisele õpikeskkonnale matemaatika õpetamisel:

1. *Kool korraldab õppe klassis, kus on tahvlile joonestamise vahendid.*
2. *Kool võimaldab vajaduse korral kasutada klassis internetiühendusega sülearvutite või lauaarvutite komplekti arvestusega vähemalt üks arvuti viie õpilase kohta ainekavas märgitud õpitulemuste saavutamiseks ning esitlustehnikat seoste visualiseerimiseks.*
3. *Kool võimaldab tasandiliste ja ruumiliste kujundite komplektid.*
4. *Kool võimaldab kasutada klassiruumis taskuarvutite komplekti.*

Punktis 2 on fikseeritud, et matemaatika õpetamiseks on vajalik süle- või lauaarvutite olemasolu matemaatikaklassis ning peab olema ka esitlustehnika (vähemalt projektor) visualiseerimiseks. Lisaks projektorile võib olla interaktiivne tahvel (Smart, Cleverboard vms), pultide komplekt interaktiivse tahvli juurde, dokumendikaamera jms. Punktis 4 eeldatakse, et matemaatikaklassis on olemas taskuarvutite komplekt, mida saavad õpilased vajaduse korral kasutada. Märkimata on jäetud, missugused need arvutid peavad olema. Eeldame, et tegemist on vähemalt nn inseneriarvutitega, millega saab leida juuri ja astmeid, eksponentfunktsiooni väärtusi, logaritme, trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi ning mõningaid kombinatoorika elemente. Lisaks riistvarale peab õpetajal olema kasutamiseks sobiv tarkvara, vastasel juhul on IKT vahendite efektiivne kasutamine mõeldamatu.

Missugust tarkvara kasutada ja kust seda leida?

Arvutiprogrammid, PowerPointi esitlused, Studyworksi töölehed jms, mis on valminud eelmise sajandi lõpus, on üldjuhul moraalselt vananenud, kuigi siiski kasutatavad. Need õpetajad, kes kasutasid veel mõned aastad tagasi Functioni, on üldjuhul üle läinud programmile GeoGebra[2]. Tegemist on pidevalt arendatava programmiga, mis oli esialgselt mõeldud geomeetriaülesannete lahendamiseks. Programmi täiustamise käigus on lisandunud hulgaliselt mooduleid, mille abil saab lahendada ülesandeid algebrast, tõenäosusteooriast ja statistikast ning matemaatilisest analüüsist (versioonid 4.0 ja 4.2). GeoGebra puhul ei ole tarvilik internetiühendus, kuid arvutisse peab olema installeeritud Java.

Teine arvutialgebra programm – Wiris[3], võimaldab teha arvutusi, lihtsustada ratsionaal- ja irratsionaalavaldisi, lahendada võrrandeid (võrratusi) ning nende süsteeme. Saab arvutada funktsiooni piirväärtust, leida tuletisi ning arvutada integraalide väärtusi jpm. Wirises on arvukalt võimalusi jooniste tegemiseks (seda nii kahe- kui ka kolmemõõtmelisena). Wiris töötab ainult juhul, kui on olemas internetiühendus.

---

[1] https://www.riigiteataja.ee/akt/114012011002
[2] http://www.geogebra.org
[3] http://www.wiris.ee

Mõlema eespool mainitud programmi jaoks on tehtud hulgaliselt töölehti, neid on võimalik leida Koolielu[4] portaalist ning samuti „Matemaatikaõpetajate virtuaalse võrgustiku“ kodulehelt[5] ning nende programmide kodulehelt.

Tõenäosusteooria elementide tutvustamiseks on olemas eestikeelne programm „Tõenäosusteooria“, mis on koolides Phare ISE CD-l, vajadusel saab seda ka internetist alla laadida[6]. Statistika õpetamisel soovitan kasutada MS Excelit (või mõnda selle analoogi, nt OpenOffice[7]).

Väga võimsa matemaatikapaketi Mathematica veebilehel on ka koolis kasutamiseks sobivaid demosid[8], nende puuduseks on see, et need on ingliskeelsed. Kuna nende demode juures on teksti suhteliselt vähe, siis saab neid väga edukalt kasutada. Tunniks ettevalmistamisel tuleb demod oma arvutisse alla laadida ja üle kontrollida, kas kõik toimib.

Rikkalikult on õppematerjale Youtube's, paraku on tekst enamasti ingliskeelne ning mõningatel juhtudel erineb ka kasutatav tähistus oluliselt meile harjumuspärasest. Praktikas olen mõnda õppevideot näidanud nii, et kõlarid on välja lülitatud ning kommenteerin ise esitatavat lahenduskäiku. Youtube`i või Teachtube`i[9] video kasutamine on mõeldav juhul, kui video on eelnevalt põhjalikult üle vaadatud ning selle kasutamiskõlblikkuses veendutud.

Soovi korral võib õppematerjalide otsimiseks kasutada ka interneti otsingumootoreid, näiteks Google`t. Sisestades otsingusõnadeks „lineaarvõrrandi lahendamine“ saame üle saja veebilehe, millelt on võimalik materjale leida (kui palju neist on kasutuskõlbulikud, see on iseasi). Kui otsingu lahtrisse sisestada „solving linear equations“, on õpetajal valikuvõimalus tunduvalt suurem (suureneb ka oht rämpsmaterjalide otsa sattuda). Süstematiseeritud kujul esitatakse õppevideod ja testid Khan Academy[10] veebilehel. Puuduseks pean videos kirja kehva kvaliteeti ning jällegi tuleb arvestada sellega, et kasutatakse meile mitte harjumuspärast sümboolikat.

IKT vahendite kasutamise võimalusi matemaatika laias kursuses

Järgnevalt vaatleme, kuidas ja missuguseid IKT vahendeid on võimalik kasutada laia kursuse teemade käsitlemisel. Toodud soovitused ei saa mingil juhul olla lõplikud, sest õpetaja võib kasutada siin käsitlemata tarkvaralahendusi (tarkvara uueneb pidevalt, tulevad ka uued tehnilised vahendid jms).

I kursus – „Arvuhulgad. Avaldised”

Kursuse esimese teema juures arvusüsteeme õppides on võimalik kasutada konverterit, mis teisendab arvu süsteemist X süsteemidesse Y ja Z, kusjuures X, Y ja Z on kümnendsüsteem, kahendsüsteem ja kuueteistkümnendsüsteem. Selle konverteri abil on õpilasel võimalik oma teisenduste tulemusi kontrollida.

---

[4] http://www.koolielu.ee
[5] http://mott.edu.ee
[6] http://www.ise.ee/cdrom/cd2/toenaosus/index.htm
[7] http://et.openoffice.org/
[8] http://www.wolfram.com/products/player/
[9] http://www.teachertube.com/
[10] http://www.khanacademy.org/

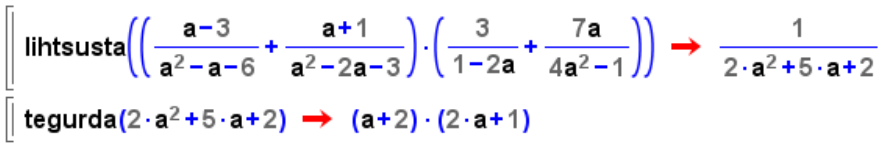
Avaldiste lihtsustamisel soovitan kasutada tulemuste kontrollimisel programmi Wiris. Ülesannete vahetuks lahendamiseks on see programm ebasobiv, sest annab vastuse ilma vahepealseid teisendusi näitamata. Kahjuks pole meil kasutada T-algebra analoogi keerukamate avaldiste jaoks. Ratsionaalavaldise lihtsustamisel soovitan avaldis jaotada osadeks ning lihtsustada iga alaülesanne eraldi. Sellisel juhul saab õpilane vigase lõppvastuse puhul leida vea tekkimise koha.

Näide: lihtsustame avaldise $\left(\frac{a-3}{a^2-a-6}+\frac{a+1}{a^2-2a-3}\right)\left(\frac{3}{1-2a}+\frac{7a}{4a^2-1}\right)$.

Avaldise lihtsustamisel on vigade tekkeks palju võimalusi:

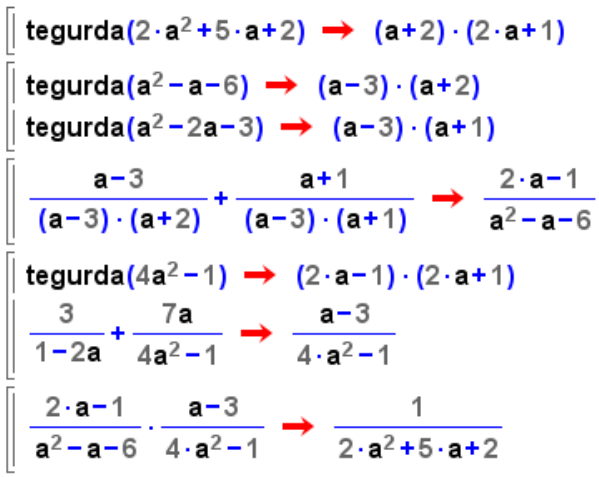
a) eksitakse ruutkolmliikmete tegurdamisel;
b) tehakse vigu murdude liitmisel;
c) eksitakse korrutamisel ja/või taandamisel.

Wirisega lahendades saame:



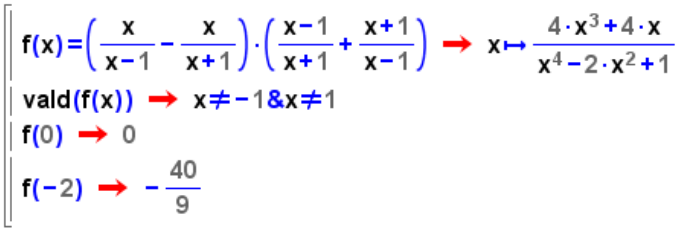
Joonis 1

Samm-sammult ülesande lahendust kontrollides teeme järgmised teisendused:



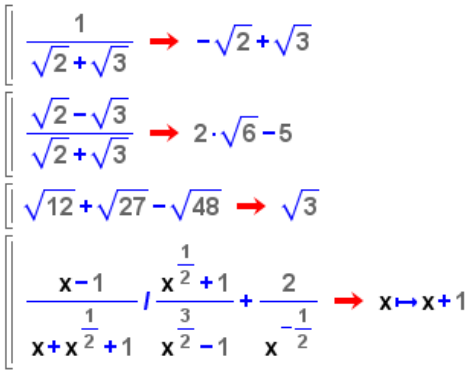
Joonis 2

Joonisel 3 on esitatud avaldise lihtsustamine etappide kaupa ning juhul, kui õpilane on mingi teisendusega eksinud, siis nüüd saab raskusteta vea tekkimise koha avastada. Vajaduse korral saab leida avaldise määramispiirkonna ja arvutada ka avaldise väärtuse.



Joonis 3

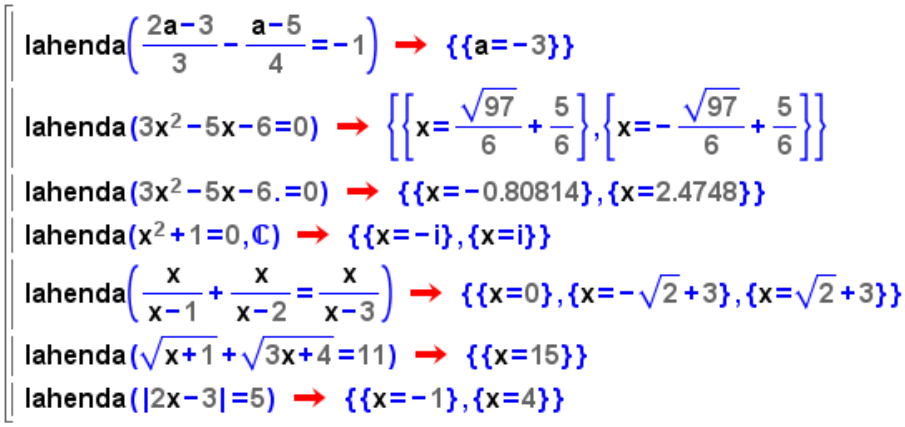
Irratsionaalavaldiste lihtsustamiseks Wiris alati ei sobi, sest programm ei suuda keerukaid avaldisi lihtsustada. Lihtsamate avaldiste puhul tuleb programm lihtsustamisega toime (vt joonis 4).



Joonis 4

II kursus – „Võrrandid ja võrrandisüsteemid"

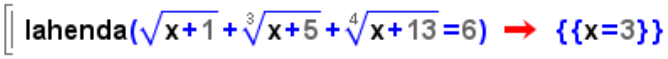
Võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamisel saab tulemusi kontrollida Wirise abil. Joonisel 5 on näited erinevat liiki võrrandite lahendamise kohta.



Joonis 5

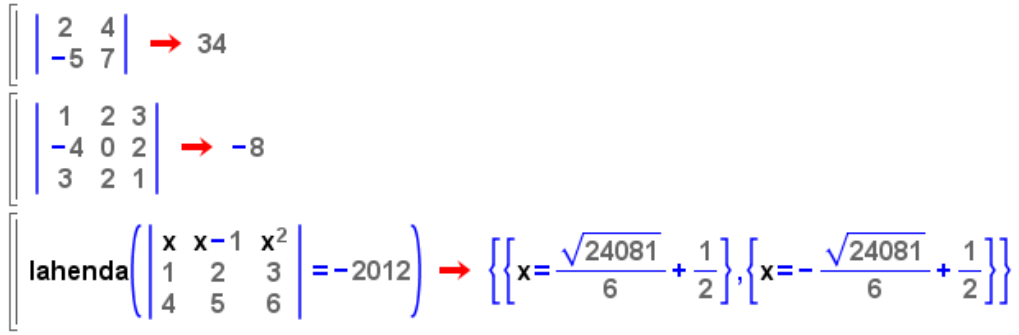
Ruutvõrrandi lahendamisel annab Wiris täpsed lahendid. Kui soovime lahendite kümnendlähendeid, siis lisame vabaliikme lõppu punkti (joonisel on arvu 6 lõpus punkt). Wiris annab soovi korral ka kaaskompleksarvulised lahendid (selleks tuleb lisada sümbolite alt täht C).

Wiris sobib õppekavas ette nähtud juurvõrrandite lahendite kontrollimiseks. Programm suudab lahendada ka selliseid võrrandeid, kus esinevad erinevate juurijatega juured.



Joonis 6

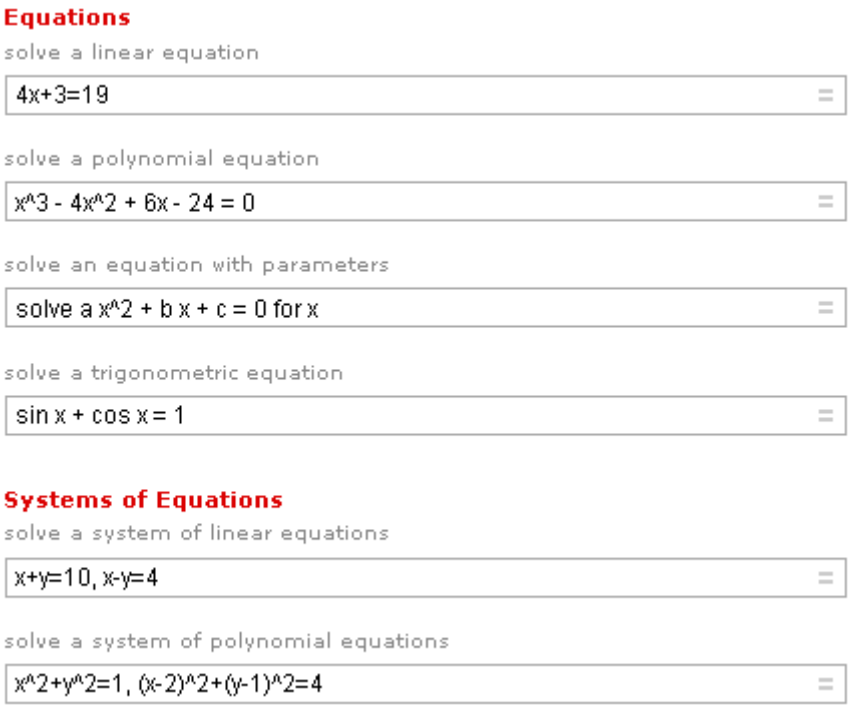
Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisel kasutatakse sageli determinante. Determinandi väärtuse arvutamist saab kontrollida jällegi programmiga Wiris. Samuti saab lahendada võrrandeid, kus tundmatu on determinandis:



Joonis 7

Wirise abil saab lahendada ka mittelineaarseid võrrandisüsteeme (neid on võimalik lahendada ka GeoGebra abil). Selliseid süsteeme on vaja lahendada, kui soovime leida kahe joone lõikepunkte (näiteks parabooli ja ringjoone ühised punktid vms).

Võrrandite lahendamiseks võib soovi korral kasutada ka WolframAlpha´t[11] (vt joonis 8).

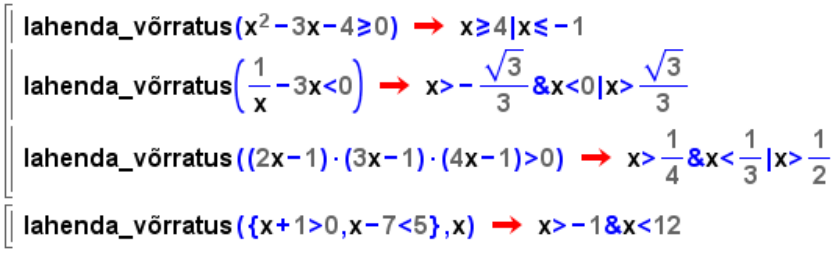


Joonis 8

III kursus – „Võrratused. Trigonomeetria I ”

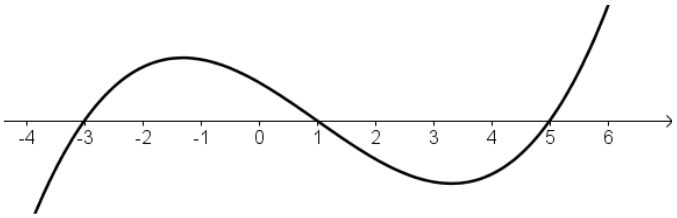
Võrratuste lahendamisel saab kasutada mõlemat eespool nimetatud programmi: Wirist ja GeoGebrat. Wirisega saab võrratusi ja nende süsteeme lahendada algebraliselt (vt joonis 9), GeoGebrat kasutades lahendame võrratuse joonise abil (joonestame vastava funktsiooni graafiku ja vajadusel muudame ühikute pikkust koordinaattelgedel), näiteks võrratuse lahendamisel intervallmeetodiga (vt joonis 10).

[11] http://www.wolframalpha.com/



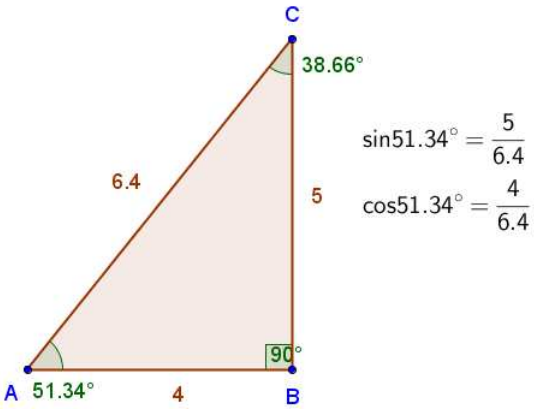
Joonis 9

Võrratuse $(x + 3)(x - 1)(x - 5) > 0$ lahendamisel teeme GeoGebra abil joonise ning loeme sellelt otsitava lahendihulga.



Joonis 10

Trigonomeetria põhiseoste õppimisel (vaadeldakse seoseid täisnurkses kolmnurgas) saab kasutada GeoGebrat (vt joonis 11) või mõnda täisnurkse kolmnurga lahendamiseks mõeldud solverit.

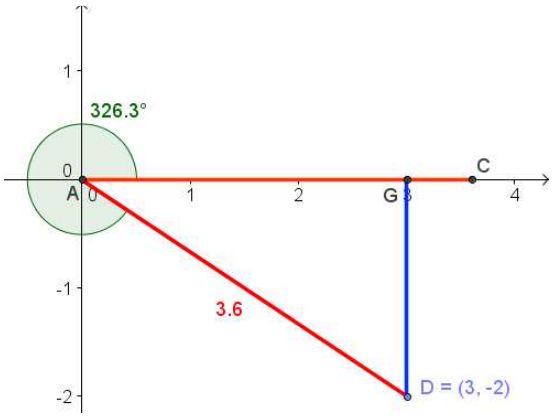


Joonisel on täisnurkne kolmnurk, mille tippu C saab üles-alla liigutada. Tänu sellele muutuvad nurgad tippude A ja C juures ning GeoGebra arvutab automaatselt tipu A juures oleva nurga siinuse ja koosinuse. GeoGebra töölehte saab täiendada nii, et siia tekivad trigonomeetria põhiseosed: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ ja $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

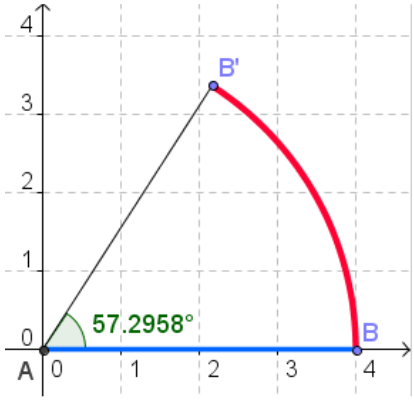
Joonis 11

IV kursus – „Trigonomeetria II ”

Kursuse üheks oluliseks teemaks on nurga mõiste üldistamine. Kui teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide käsitluse illustreerimiseks soovitasin kasutada GeoGebrat, siis saab seda programmi kasutada ka siin. Töölehele võib lisada teksti: arvutame joonisel oleva nurga siinuse, koosinuse või tangensi ja esitame selle kümnendmurruna (soovi korral võib suhte esitada ka hariliku murruna) (vt joonis 12).



Joonis 12



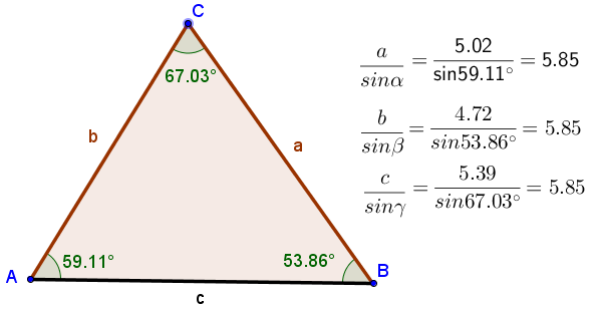
Joonis 13

Kraadi- ja radiaanmõõdu käsitlemisel leiab sobivaid demosid internetist: kirjutage Google otsingusse *Converting radians to degrees* ning valige sobiv demo. Soovi korral saab nurga 1 rad konstrueerida ka GeoGebra abil (vt joonis 13).

Trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamiseks arvestatavaid eestikeelseid arvutiprogramme ei ole. Wiris ei suuda lihtsustada avaldist, kui trigonomeetrilise funktsiooni argumendis on kahe nurga summa või vahe. Õpilastele tasub soovitada internetipõhist programmi Wolfram-Alpha[12]. Avaldise sisestamine on küll tülikas, kuid selle programmiga on siiski võimalik avaldisi lihtsustada.

Kolmnurgaga seotud teemade puhul (pindala valemid, siinus- ja koosinusteoreem) soovitan kindlasti kasutada GeoGebrat (vt joonis 14 ja joonis 15). Kolmnurga ühe tipu koordinaatide muutmisel (tippe saab hiirega liigutada) muutuvad külgede pikkused ja sisenurgad, kuid säilib külje pikkuse suhe külje vastas oleva nurga siinusesse.

Programmist on kasu tunniks ettevalmistumisel: saab teha valmis joonised, mida hiljem tunnis kasutada ning õpilane saab oma kodust tööd programmi abil ise kontrollida. GeoGebraga saab näitlikustada ka neid juhtumeid, kui kolmnurka määravad algandmed on vastuolulised, st kolmnurka pole olemas. Mõnede algandmete korral võib tekkida kaks kolmnurka, ka siis on GeoGebra visualiseerimisel abiks. Internetist saab leida ka kolmnurkade lahendamiseks mõeldud programme, kuid neil on üldine puudus – saame lõpptulemuse, kuid ühtegi arvutust ei näidata. Sellised programmid sobivad lahenduste kiireks kontrollimiseks.

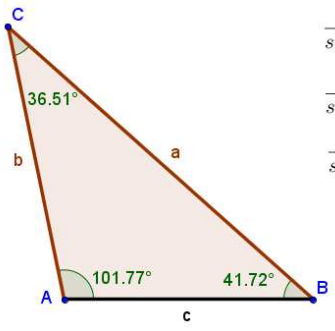


$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{5.02}{\sin 59.11^\circ} = 5.85$$

$$\frac{b}{sin\beta} = \frac{4.72}{sin 53.86^\circ} = 5.85$$

$$\frac{c}{sin\gamma} = \frac{5.39}{sin 67.03^\circ} = 5.85$$

Joonis 14



$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{6.58}{sin 101.77^\circ} = 6.72$$

$$\frac{b}{sin\beta} = \frac{4.47}{sin 41.72^\circ} = 6.72$$

$$\frac{c}{sin\gamma} = \frac{4}{sin 36.51^\circ} = 6.72$$

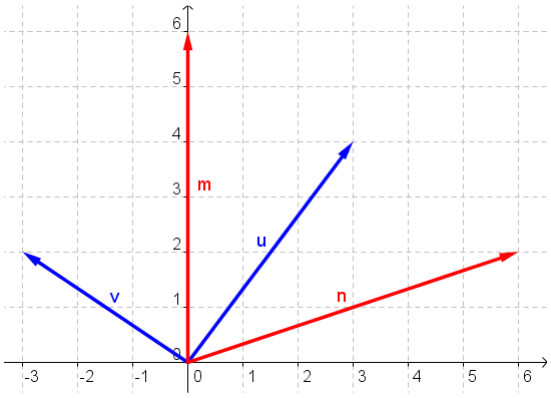
Joonis 15

[12] http://www.wolframalpha.com/

V kursus – „Vektor tasandil. Joone võrrand ”

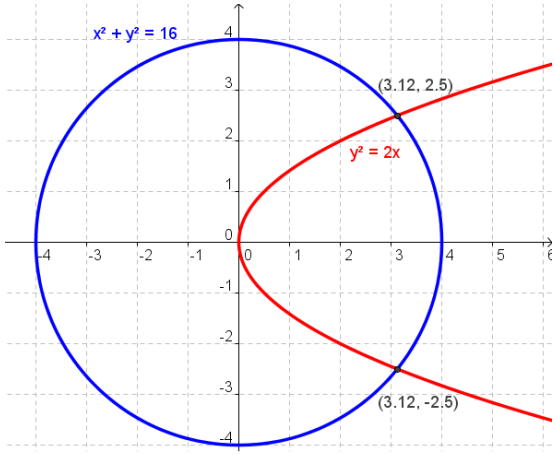
See kursus avab laialdased võimalused GeoGebra kasutamiseks. Väga lihtsalt saab demonstreerida lineaartehteid vektoritega, vektori lahutamist koordinaattelgede suunalisteks komponentideks, joonestada etteantud parameetrite järgi sirgeid, leida sirgete lõikepunkti jms. Programm võimaldab joonestada ka teist järku jooni (näeme joont ja selle võrrandit) jms.

Joonisel 16 on vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ning nende summa $\vec{m}$ ja vahe $\vec{n}$. Muutes vektorite $\vec{u}$ ja/või $\vec{v}$ koordinaate muutuvad vastavalt ka nende vektorite summa ja vahe. Kui varasemates GeoGebra versioonides esitati vektor meile harjumuspäraselt (n=(6;2)), siis uuemates alates versioonist 4.0 kirjutatakse vektori koordinaadid üheveerulise maatriksina ($n = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$).



Joonis 16

Sirge võrrandi saab GeoGebras esitada kolmel erineval kujul: a) tõusu ja algordinaadi kaudu; b) üldvõrrandina ja c) parameetriliste võrrandite kaudu. Missugune viis parajasti sobiv on, selle valib õpetaja. Samuti saab joonestada teist järku jooni ning leida nende lõikepunktide ligikaudsed koordinaadid (vt joonis 17). Kasutades liugurit, on võimalik joone võrrandisse lisada parameetrid. Neid muutes näeme, kuidas parameetrid mõjutavad joone asendit koordinaatteljestikus.



Joonis 17

VI kursus – „Tõenäosus, statistika ”

Tõenäosusteooria ajaloolises arengus on oluline osa olnud eksperimentidel: mündivisetel „kullide“ ja „kirjade“ loendamine, täringuheidetel teatavate seaduspärasuste uurimine jms. Lisaks õpikule on õpetajal võimalus kasutada mitmeid arvutiprogramme, mille abil saab õppimist muuta atraktiivsemaks. Avatud Eesti Fondi abil tehti juba aastaid tagasi õppevahend tõenäosusteooria õppimiseks. See sisaldab näited ja ülesandeid mündiheitmisest, loteriidest, täringuvisetest jms, lisaks on võimalik demonstreerida Galtoni võre „tööpõhimõtet“ ja panna lapsed pead murdma Monty Halli paradoksi lahendades. Soovi korral saab 6 diskil paikneva

programmi alla laadida internetist.[13] Samast leiab teisigi materjale (nt demod YouTube´st vms).

Statistika elementide käsitlemisel soovitan kasutada MS Excelit või selle analooge (OpenOffice puhul Calk). Kui andmemahud on väiksed, siis saab keskväärtust, moodi, mediaani ja ka standardhälvet leida taskuarvutiga arvutades. Üldjuhul siiski nii enam ei toimita ja andmetöötlust on mõistlik teha arvuti abil, mis ei välista sugugi seda, et arvutusi tehes ei pea õpilane aru saama, kuidas on arvutatavad suurused defineeritud ning mis kombel saab neid ka käsitsi arvutades leida. Kui tunnus on bimodaalne (või multimodaalne), siis annab Excel ainult ühe moodi. Andmetabelile saab lisada vajadusel diagramme.

Kino "Saurus" külastajate arv novembris				
121	333	532	543	235
334	265	385	673	102
134	765	494	234	
432	123	276	599	
456	444	235	266	
456	564	673	300	
602	543	235	256	
keskväärtus on	387			
mood on	235			
mediaan on	359,5			
standardhälve	183,4			

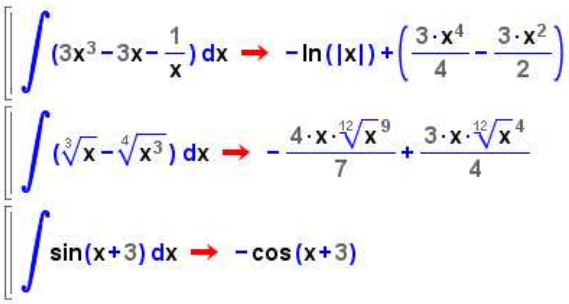
Joonis 18

Jaotusseaduste käsitlemisel on võimalik leida abimaterjale internetist (PowerPointi esitlused, Exceli töölehed jms).

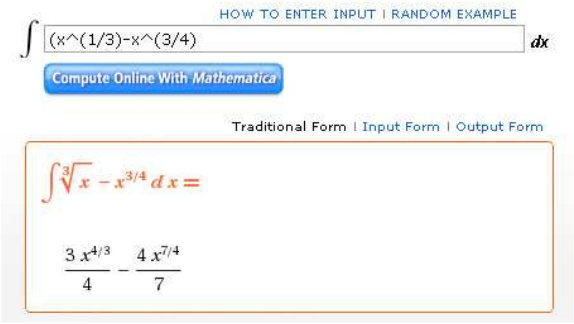
XI kursus[14] - „Integraal. Planimeetria kordamine ”

Integraali puhul on tegemist taasleitud vanaga, st õppekava muutmise käigus oli see teema vahepeal kohustuslike kursuste nimistust väljas, kuid laia matemaatika kursust on raske ilma integraali käsitlemata ette kujutada, sest siinjuures korratakse ka paljusid varem õpitud teemasid, nt funktsiooni graafiku joonestamine, lõikepunktide leidmine, esimest järku tuletis, arvutamine ratsionaal- ja irratsionaalarvudega jms.

Määramata integraali käsitlemisel peab õpilane lihtsamad integraalid leidma paberit ja pliiatsit kasutades, kuid on hea, kui ta saab arvutuste tulemusi kontrollida. Selleks soovitan kasutada Wirist (kõige kättesaadavam eestikeelne programm). Selle programmi kasutamisel tasub tähelepanu pöörata sellele, et mitte alati ei saa me vastust, kus avaldis on lõpuni lihtsustatud (vt joonis 19, teine integraal). Lisaks puudub ka määramata konstant C (mõne arvutiprogrammi puhul kirjutatakse C asemele arv null).



Joonis 19

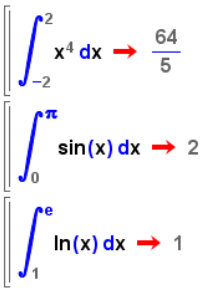


Joonis 20

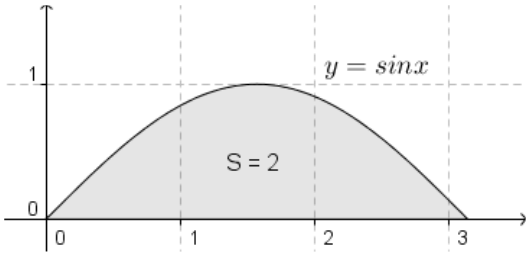
[13] http://www.ise.ee/cdrom/cd2/toenaosus/index.htm
[14] Kursuste VII-X kohta on käesolevas kogumikus eraldi artikkel

Määramata integraali saab leida internetis Wolfram Mathematica Online Integratori[15] abil (vt joonis 20).

Määratud integraali väärtuse arvutamiseks saame kasutada Wirist (vt joonis 21) või GeoGebrat (juhul, kui on vaja leida pinnatüki pindala, vt joonis 22).



Joonis 21



Joonis 22

Integraali kohta on teinud põhjaliku õppematerjali Viljandi matemaatikaõpetaja Marika Anissimova,[16] lisaks tasub vaadata ka MottWikis olevaid õppematerjale.

Planimeetria elementide puhul on tegemist kursusega, kus valdavalt korratakse põhikoolis õpitud teemasid. Kõiki konstruktsioone ning meetrilisi seoseid saab visualiseerida GeoGebra abil. Nende teemade kohta leiab lisamaterjali MottWikist ning interneti otsingut kasutades (saab leida töölehti, PowerPointi esitlusi jms). Konstruktsiooniülesannete puhul soovitan kasutada arvutiklassi, et õpetaja juhendamisel omandaksid kõik õpilased elementaarse konstrueerimise oskuse. Kolmnurga sise- ja ümberringjoone konstrueerimisel tuleb tähelepanu pöörata sellele, et kolmnurga tippude liigutamisel kolmnurgale joonestatud ümberringjoon jääb ka tippude asukoha muutumisel ikka ümberringjooneks (sama siseringjoone kohta).

Arvutiprogrammide kasutamine annab võimaluse õpilastel endil avastada (kui õpilased on seda teinud juba põhikoolis, siis tuleb vältida triviaalseid ülesandeid). GeoGebra abil on lihtne näidata, et

a) kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks;
b) kumera nelinurga külgede keskpunktide järjestikusel ühendamisel saame nelinurga, mille pindala on pool esialgse nelinurga pindalast (laske õpilastel selle väite õigsus tõestada või väide ümber lükata);
c) kui rööpküliku *ABCD* sees vabalt võetud punkt *P* ühendada rööpküliku tippudega, siis $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{ADP} + S_{BCP}$;
d) trapetsi haarade keskpunktid ja diagonaalide keskpunktid asuvad ühel sirgel, kusjuures diagonaalide lõikepunktide vaheline kaugus on võrdne trapetsi aluste poolvahega;
e) kumera viisnurga *ABCDE* diagonaalide summa on suurem hulknurga ümbermõõdust, aga väiksem kahekordsest ümbermõõdust.

Sobivaid ülesandeid leiab kehtivatest ja varasematest matemaatikaõpikutest ning ka internetist (näiteks TÜ Teaduskooli veebilehelt).

Kui viiakse tund läbi arvutiklassis ja kasutatakse GeoGebrat, siis tuleb õpilaste tähelepanu pöörata järgmistele asjadele:

[15] http://integrals.wolfram.com/index.jsp
[16] http://www.crjg.vil.ee/~marika/matemaatika/integraal/mratud_integraal.html

a) joonis peab olema piisavalt suur, st ei ole mõtet teha joonist, mis hõlmab ca 1/10 graafikavaatest, sest sellist joonist ei ole praktiliselt võimalik täiendada;
b) konstruktsiooni abijooned peavad olema selgelt eristuvad muudest joontest (kasutame kriipsjoont või pidevjoont, mille jämedus on üks ühik);
c) jooned ei tohi tähtedest läbi minna (seda loetakse ka tahvlijoonise puhul ebakorrektsuseks;
d) lõpetatud töö (konstruktsioon) on mõistlik salvestada.

XII kursus – „Geomeetria I“

Tegemist on ruumigeomeetria kursusega, kus kõigepealt tegeletakse stereomeetria asendilausetega. Järgnev kuulub analüütilise geomeetria valdkonda:
a) punkti koordinaadid ruumis;
b) tehted vektoritega, nende kollineaarsus ja komplanaarsus;
c) sirge võrrand ruumis, sirgete vastastikused asendid;
d) tasandi võrrand, tasandite vastastikused asendid;
e) sirge ja tasandi lõikepunkt.

Analüütilise geomeetria ülesannete lahendamisel saab kasutada abivahendina programmi Wiris (saab teha kolmemõõtmelisi jooniseid) ning kasutada determinanti tasandi võrrandi koostamisel.

Näide: koostame tasandi võrrandi, kui tasand on määratud punktiga $A(1;\ 2;\ 3)$ ja rihivektoritega $\vec{u} = (-2;3;4)$ ja $\vec{v} = (2;-3;4)$. Wirise abil leiame determinandi (vt joonis 23) ning võrdsustame selle nulliga, võimaluse korral lihtsustame võrrandi.

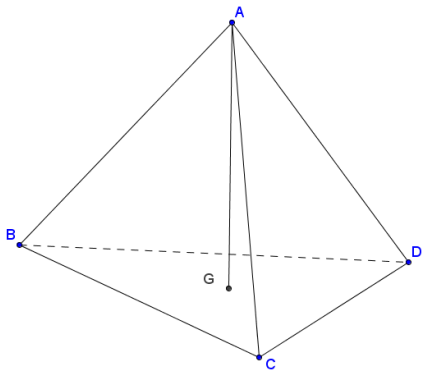
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow 24\cdot x+16\cdot y-56$$

Tasandi võrrand on $24x + 16y = 56$ ehk $3x + 2y = 7$.

Joonis 23

XIII kursus – „Geomeetria II“

Kursuses käsitletavad ruumikujundid, nt prisma, püramiid, silinder, koonus ja kera on põhikoolis põgusat käsitlemist leidnud. Siis lahendati ülesandeid korrapäraste kolm- ja nelinurksete prismade kohta ning püramiididest uuriti põhjalikumalt korrapärast nelinurkset püramiidi. Käesoleva kursuse raames vaadeldakse püstprismasid, mille põhjad ei pruugi olla korrapärased hulknurgad. Püramiidide puhul võib põhitahuks olla mistahes kumer hulknurk. Kui kasutame GeoGebrat, siis tuleb joonis n-ö tükkhaaval kokku panna (vt joonis 24). Selle heaks küljeks on see, et õpilased näevad joonise teket algusest lõpuni. Hiljem, kui õpilastel on olemas jooniste tegemise vilumus, võib kasutada tunnis varem valmis tehtud jooniseid, mida interaktiivsele tahvlile või ekraanile näidata. Interaktiivsetel tahvlitel (nt Smart, Cleverboard jt) sisaldab tarkvara mõningate ruumi-

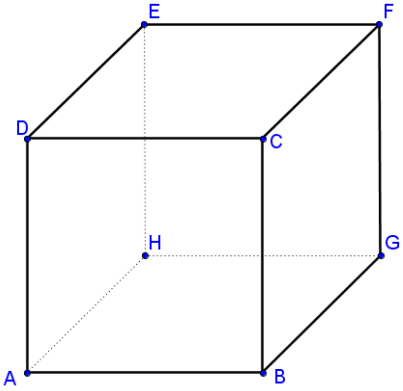


kujundite jooniseid ning neid tasub ka kasutada. Ruumikujundite pilte saab leida ka Google otsingut kasutades, kuid sel juhul tuleb jälgida, et ei rikutaks autoriõigusi.

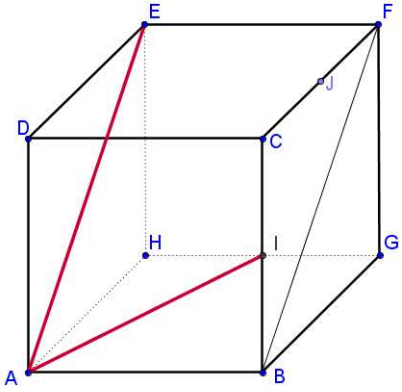
Joonis 24

GeoGebrat kasutades saab ruumikujundi lõikamisel tasandiga lõiketasandi teket näidata sammhaaval (joonis 25 – joonis 27). Selleks tuleb joonis eelnevalt valmis teha ning ülesande lahendamisel kasutame GeoGebras olemasolevat konstruktsiooni sammude navigeerimisriba .

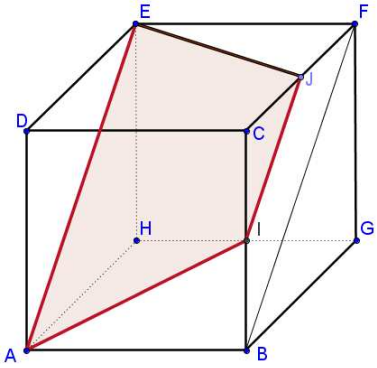
Ruumikujundite kohta leiab õppematerjale ka MottWikist ja Koolielu portaalist. Internetiotsingut kasutades leiame mitmeid PowerPointi esitlusi. Internetist leitud õppematerjalide puhul soovitan need enne kasutamist kriitilise pilguga üle vaadata, sest paljud väljapandud materjalid on poolikud või sisaldavad ilmselgeid vigu.



Joonis 25



Joonis 26



Joonis 27

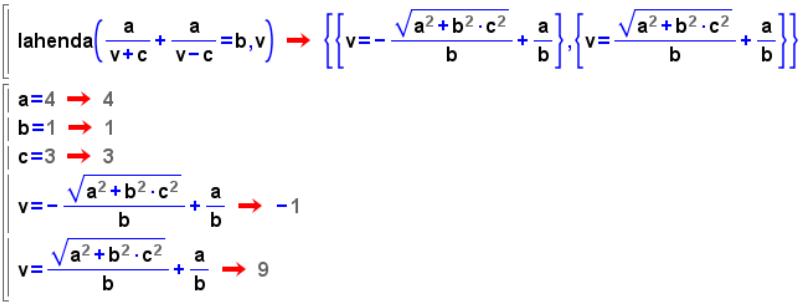
XIV kursus – „Matemaatika rakendused, reaalsete protsesside uurimine”

Matemaatika ainekava juurde kuuluvas õppeprotsessi kirjelduses märgitakse, et see kursus tugineb arvutusvahendite kasutamisele. Tõepoolest – kui lahendada mõni reaalset situatsiooni kirjeldav ülesanne etteantud arvandmete põhjal, siis piisab taskuarvutist, kuid me ei saa mingit ettekujutust sellest, kuidas muutub lahend, kui parameetreid muuta. Selleks on vaja ülesanne lahendada üldkujul (st muutuvad suurused tähistatakse tähtedega) ning seejärel lahendit uurida.

Näide 1. Aadu viib sõudepaadiga oma kitse 4 km allavoolu asuvale karjamaale ja pöördub kohe tagasi. Edasi-tagasi sõiduks kulub tal täpselt 1 tund. Jõe voolu kiirus on $3\frac{km}{h}$. Leida paadi kiirus seisvas vees (ehk paadi omakiirus).

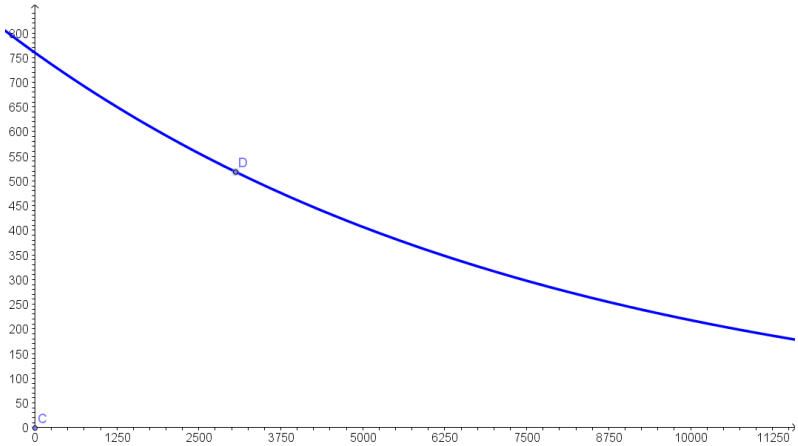
Lahendus: lahendame murdvõrrandi $\frac{4}{v+3}+\frac{4}{v-3}=1$, lahendid on $v_1 = 9$ ja $v_2 = -1$. Teine lahend on ilmselt absurdne ja seega on paadi kiirus seisvas vees 9 km/h. Muudame nüüd ülesande andmeid: olgu karjamaa a km kaugusel, edasi-tagasi sõiduks kulugu b tundi ning jõe voolu kiirus olgu c km/h. Paadi kiiruse v vee suhtes leiame võrrandist $\frac{a}{v+c}+\frac{a}{v-c}=b.$ Võrrandi lahendamisel Wirisega saame kaks lahendit (vt joonis 28). Võrdleme Wirisega saadud lahendeid eespool esitatud murdvõrrandi lahenditega. Näeme, et need on kooskõlas. Muutes nüüd arve a, b ja c võime saada kuitahes palju erinevaid lahendeid. Seejuures tuleb kindlasti absurdsed lahendid eraldada tõepärastest. Kui $b = 0{,}5$; $a = 4$ ja $c = 3$, siis peaks paadi

kiirus vee suhtes olema ligikaudu 16,54 km/h, mis on ilmselt ebareaalne. Kui edasi-tagasi sõiduks kuluks 8 tundi, siis on paadi kiirus vee suhtes 3,54 km/h, mis on samuti ebareaalne. Võttes b = 800 (edasi-tagasi sõiduks kulub 800 tundi) saame paadi kiiruseks 3,005 km/h, st paat vaevu liigub kalda suhtes. Seda lihtsat mudelit uurides saavad õpilased aru, et paadi kiirus seisva vee suhtes peab olema suurem, kui 3 km/h, sest vastasel juhul ei jõua Aadu kunagi enam paadiga koju.



Joonis 28

Näide 2. Õhurõhk p kõrgusel h merepinnast leitakse valemiga $p = 760 \cdot e^{-0{,}000125h}$. Esitame õhurõhu sõltuvuse kõrgusest graafiliselt.



Joonis 29

Kui soovime leida õhurõhu mingil kõrgusel h_0, siis kirjutame GeoGebra sisendreale f(h_0). Soovi korral võib kasutada ka arvutustabelit. Kui soovitakse ülesanne graafiliselt lahendada, siis joonestatakse sirge $x = h_0$ ning leitakse joonte lõikepunktide koordinaadid.

IKT vahendite kasutamise võimalusi matemaatika kitsas kursuses

Matemaatika kitsa kursuse ajaressurss on väga piiratud – kolme aasta peale on ette nähtud 8 kohustuslikku kursust (ehk 280 tundi). Kui tähelepanelikult vaadata kitsa kursuse õppe-protsessi kirjeldust, siis on näha, et 10. klassis läbitakse samad teemad, mis laias kursuses. Erinevus on teoreetilise osa käsitluse sügavuses ja ülesannete keerukuses. Kuna klassitundideks on aega vähe, kuid õpilased peavad nõutavad õpitulemused omandama (12. kl lõpus on matemaatika riigieksam), siis on väga oluline, et õpilased suudavad ka iseseisvalt matemaatikaga tegeleda ja oskavad ülesannete lahendusi kontrollida (kui see on võimalik). Seepärast on IKT vahendite kasutamine tunnis ning programmide GeoGebra ja Wirise

tasemel valdamine õpilaste poolt oluline. Ühegi arvutiprogrammi õpetamiseks õpetajal kahjuks aega ei ole, seepärast tasub juba 10. klassi alguses õpilastele selgitada, et programmide rakendamisvõimaluste uurimine jääb põhiliselt nende ülesandeks, mis ei välista seda, et konsultatsioonitundides ei võiks nimetatud teemasid arutada. Praktilistele kogemustele tuginedes võin öelda, et kui lahendame Wirisega tunnis ülesandeid, siis saavad õpilased hiljem sellega ka ise hakkama. GeoGebra puhul on vaja anda harjutusülesandeid jooniste tegemiseks, et nad harjuksid programmi kasutama.

I kursus – „Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused"

Avaldiste lihtsustamisel, võrrandite ja võrratuste lahendamisel soovitan kasutada Wirist. Kuna kitsas kursuses vaadeldavad avaldised ei ole väga keerukad, siis saab Wiris nende lihtsustamisega üldjuhul ka hakkama. Pikemate ratsionaalavaldiste puhul on mõistlik avaldis jagada osadeks ning need eraldi lihtsustada (vt joonis 30). Üks näide on ka eespool laia kursuse kohta, kuid selliseid avaldisi kitsa kursuse raames üldjuhul ei lihtsustata.

$$(m^2-1)\cdot\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}-1\right) \rightarrow -m^2+3$$

$$\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}-1 \rightarrow \frac{-m^2+3}{m^2-1}$$

Joonis 30

$$\sqrt{8}=4\cdot\sqrt{2}\,? \rightarrow \text{väär}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,? \rightarrow \text{väär}$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{27\cdot 4}\,? \rightarrow \text{tõene}$$

Joonis 31

Juuravaldiste puhul on võimalik kontrollida võrduse kehtivust (vt joonis 31). Seda tasub õpilastel teha kodutööde kontrollimisel. Võrrandite ja võrratuste käsitlemisel soovitan võimaluse korral kasutada interaktiivse tahvli (nt Smart vms) võimalusi. Notebook 10 vahenditega on võimalik valmis teha slaidide kogu ning seda saab ka tunnis kasutada. Kuna need slaidikogud on korduvalt kasutatavad (saab säilitada ka õpilase lahenduse), siis saab neid ka hiljem kordamistundides kasutada.

Soovitan kasutada ka MottWikis leiduvaid soovitusi (neid on iga teema puhul) ning soovi korral võib lisamaterjali leida ka Koolielust või internetiotsingut kasutades. Internetist võetud materjalide puhul on vaja need enne kasutamist kriitilise pilguga üle vaadata – kas raskusaste on sobiv ja kas materjal on matemaatiliselt korrektne.

II kursus -„Trigonomeetria"

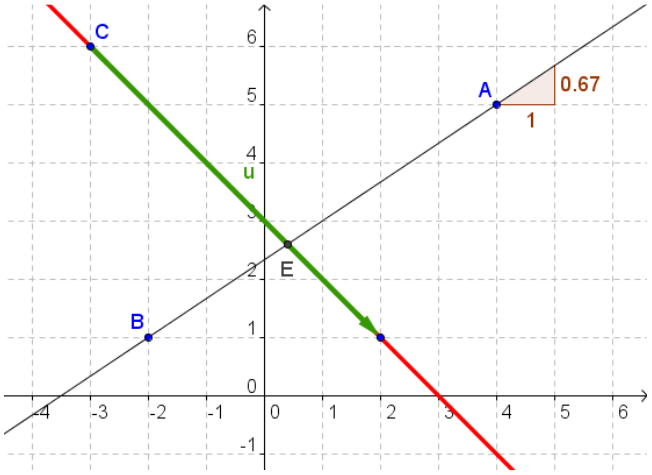
Kuna see kursus sisaldab suure hulga valemeid, siis soovitan need teemade kaupa grupeerida eraldi slaididele (pole oluline, kas kasutame Notebook 10 või PowerPointi võimalusi). Sel juhul on võimalik vajaduse korral näidata vajalikke valemeid ekraanile (valemid on mõistlik esitada koos näitega selle kasutamise kohta). Trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamisel ei soovita Wirisega katsetada, sest programm ei suuda üldjuhul neid lihtsustada ning ülesandeid ja nende lahendamiseks vajalikke valemeid käsitsi kirjutades jäävad need ka paremini meelde. Seevastu kolmnurgaga seotud teemade õppimisel (pindala valemid, siinus- ja koosinusteoreem) on mõistlik kasutada programmi GeoGebra. Soovitused on üldjuhul samad, mis laia kursuse puhul (vt eespoolt).

III kursus – „Vektor tasandil. Joone võrrand"

Selle kursuse teemade juures soovitan kasutada GeoGebrat. Ülesannete juures, kus on vaja avaldada mingi vektor baasi?vektorite kaudu, saab vajaliku joonise varem valmis teha ja seda

siis tunnis kasutada. Kui GeoGebra tööleht on html-vormingus salvestatud, siis saab seda kasutada mistahes arvutis, sõltumata sellest, kas arvutis on GeoGebra olemas või mitte.

Sirge võrrandi käsitlemisel soovitan kasutada GeoGebrat. Arvutijoonisele tuginedes saab kergesti näidata, kuidas tekib sirge võrrand kahe punkti kaudu, punkti ja tõusu kaudu, punkti ja vektori kaudu ning kuidas leitakse kahe sirge lõikepunkti koordinaadid (vt joonis 32).
Tasub näidata ka seda, kuidas joonestada sirget, kui algordinaat on suur arv, nt $y = 2x - 210$ vms. Selliste sirgete joonestamise oskus on vajalik füüsikaülesannete lahendamisel.



Joonis 32

GeoGebra abil saab kontrollida, kas kahel joonel on lõikepunkte või mitte. Selleks tarvitseb teha joonis ning kahtluse korral (jooned on teineteisele väga lähedal, st neil võib olla ühine punkt) lahendame tekkinud võrrandisüsteemi ja kontrollime lahendeid Wirise abil.

IV kursus – „Tõenäosus ja statistika"

Soovitused on üldjuhul samad, mis laia kursuse puhul (vt eespoolt). Soovitan kasutada programmi „Tõenäosusteooria" ning MS Exceli vahendeid (statistika teemade käsitlemisel). Mõne interaktiivse tahvli tarkvara sisaldab vahendeid, millega simuleerida mündi heitmist, täringu(te) veeretamist, kaardipakist kaardi võtmist jms. Soovitan kasutada ka neid materjale, millele viidatakse MottWikis.

VII kursus – „Tasandilised kujundid. Integraal"

Tasandiliste kujundite käsitlemisel soovitan tunnis kasutatavad joonised GeoGebraga varem valmis teha ning konstruktsiooni navigeerimisriba abil õpilastele joonise teket seletada. Soovitan lasta ka õpilastel GeoGebra abil jooniseid valmistada (mõne kodutöö võibki GeoGebra abil teha). Arvutijoonistega ei tohi ka üle pingutada, võib tekkida oht, et hiljem ei oskagi õpilased joonestusvahendite abil mõistlikke jooniseid teha.

Integraali käsitlemisel soovitan kasutada põhiliselt Wirist (õpilased saavad tulemusi kontrollida).

VIII kursus – „Stereomeetria“

Tunniks ettevalmistamisel saab kasutada joonise tegemiseks GeoGebrat (vt soovitused laia kursuse juures). Kujundite omaduste uurimisel (tippude, tahkude ja servade loendamisel) on võimalik kasutada programmi Poly.[17]

V ja VI kursuse kohta on käesolevas kogumikus eraldi artikkel „Funktsioonide käsitlemisest IKT vahendite abil.“

[17] http://www.peda.com/poly/