Integraal

Arvo Press, Pärnu Koidula Gümnaasium

Kui on antud funktsioon, siis võime meile juba tuntud eeskirjade järgi leida tema tuletise, millel, nagu teame, on suur praktiline tähtsus. Liikumise võrrandi järgi saab leida kiirust, mis võrdub teepikkuse tuletisega aja järgi. Joone võrrandi põhjal saab tuletise abil leida selle joone puutuja tõusu jne.

Ent sageli on vaja lahendada vastupidist ülesannet: keha liikumise kiiruse valemi järgi leida liikumise võrrand, joone puutuja tõusu järgi leida joone võrrand jne. Sellistel juhtudel on vaja leida funktsioon, mille tuletis on teada. Siin tuleb appi integraal, sest integreerimine on diferentseerimise pöördtehe. Nüüd tuleks esmalt meenutada tuletiste tabelit, seejärel tuua sisse algfunktsiooni mõiste.

DEF: Kui F'(x) = f(x), siis F(x) on funktsiooni f(x) algfunktsioon.

Nüüd sobiks kinnistamiseks lahendada mõned ülesanded töökäsuga „Tõestada, et funktsioon F(x) on funktsiooni f(x) algfunktsioon**“:**

1) $F(x) = x^3 - 5x + 3$ ja $f(x) = 3x^2 - 5$;

2) $F(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7$ ja $f(x) = 8x^3 - 6x$;

Laiendame algfunktsiooni mõistet.

Teoreem: kui funktsiooni f(x) algfunktsiooniks on F(x), siis on selle funktsiooni algfunktsiooniks ka F(x) + C, kus C on konstant.

Seejärel leiame antud funktsioonide algfunktsioone: 1) $f(x) = 3x^2 + 2$; 2) $f(x) = \sin x + \cos x - 4$ 3) $f(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$; 4) $f(x) = \frac{3}{5\sin^2 x}$; 5) $f(x) = \frac{7}{3x}$; 6) $f(x) = 8e^x$; 7) $f(x) = x^3$.

Avaldist F(x) + C, mida nimetatakse funktsiooni f(x) algfunktsioonide üldavaldiseks, nimetatakse ka funktsiooni f(x) **määramata integraaliks** ja tähistakse sümboliga $\int f(x)dx$.

Seega $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Funktsiooni f(x) algfunktsiooni leidmist nimetatakse funktsiooni integreerimiseks.
Integreerimine on diferentseerimise pöördtehe.

Määramata integraali omadusi:

1) summa integraal on võrdne liidetavate integraalide summaga:
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$
2) integreeritava funktsiooni ees oleva konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette:
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Kasutades tuletise tabelit, on mõistlik selle tabeli abil koostada integraalide tabel ning see meelde jätta. Nüüd jätkub ülesannete lahendamine. Esialgu harjume integraalide tabeliga, leiame tabeli integraale 1) $\int 4x^5 dx$; 2) $\int 8xdx$; 3) $\int \frac{4dx}{7\cos^2 x}$; 4) $\int 2\cdot 3^x dx$; 5) $\int \frac{e^x}{3}dx$; 6) $\int 3\sin xdx$; 7) $\int \frac{dx}{5x}$; 8) $\int \frac{3dx}{5\sin^2 x}$. Integreerimine nõuab varem õpitud teemade head tundmist. Tuleb korrata algebra valemeid, ruutkolmliikme tegurdamist, tehteid astmetega, ratsionaalarvulist astendajat, trigonomeetria kõiki valemeid. Integraali õpetamine aitab kinnistada neid teemasid ja usinatele õpilastele raskusi ei tekita, on pigem meeldiv.
Õpime veel määrama integreerimiskonstanti mõne näite varal.

Näide1. Leida punkti A(-1;5) läbiva joone võrrand, kui selle joone mistahes punktis tõmmatud puutuja tõus on 2x.

Tuletise geomeetrilise vaste põhja võime kirjutada: $y' = 2x$ ehk $\frac{dy}{dx} = 2x$, millest $dy = 2xdx$.

Integreerides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame: $\int dy = \int 2xdx$ ehk $y = x^2 + C$.

Saadud võrrand pole aga veel otsitava joone võrrand, sest see sisaldab määramata konstanti C. Et saada ühest vastust, kasutame seda, et otsitavast joonest on teada punkt A. Asendame selle punkti

koordinaadid leitud võrrandisse, saame: $5=(-1)^2+C$, millest C=4. Seega joone võrrandiks on $y=x^2+4$. Ilma integreerimiskonstanti määramata saame paraboolide $y=x^2+C$ parve.
Määramata integraali geomeetriliseks sisuks on funktsioonide parv.

Näide 2. Punkti liikumise kiirust väljendab võrrand $v=\left(3t^2-2t-3\right)\frac{m}{s}$. Leida teepikkuse s võrrand, kui 4 esimese sekundi jooksul punkt läbis 27 m.

Teame, et kiirus on teepikkuse tuletis $v=\frac{ds}{dt}$, millest $ds=vdt$. Asendame kiiruse tema võrrandiga, saame $ds=\left(3t^2-2t-3\right)dt$ ja integreerime saadud võrduse mõlemaid pooli:
$\int ds=\int\left(3t^2-2t-3\right)dt=t^3-t^2-3t+C$, seega $s=t^3-t^2-3t+C$. Konstandi C leidmiseks asendame saadud valemis t=4 ja s=27. Saame $27=4^3-4^2-3\cdot 4+C \Rightarrow C=-9$.
Teepikkuse võrrand on $s=t^3-t^2-3t-9$.

Sellega võiks määramata integraali õpetamine piirduda ja siit suundume määratud integraali juurde.

Määratud integraali mõiste:

DEF: Algfunktsiooni F(x) + C muutu F(b) – F(a) argumendi muutumisel väärtuselt x = a väärtuseni x = b nimetatakse määratud integraaliks ja tähistatakse sümboliga $\int_a^b f(x)dx$.

Väärtust a nimetatakse määratud integraali alumiseks rajaks ja väärtust b ülemiseks rajaks.

Kehtib Newton-Leibnizi valem $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Määratud integraali arvutamist läheb hiljem vaja integraali rakenduste juures. Sellega ei maksaks üle pingutada ja integraali õpilastele keeruliste arvutustega vastikuks muuta. Siin on võimalik korrata samu teemasid, mis määramata integraali juures, täiendavalt korrata veel trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi.
Laia ja süvendatud matemaatikat õppijad peaksid oskama ka integreerimist asendusvõttega, see on neile abiks ülikoolis.

Määramata integraali leidmist integraali omaduste ja integreerimise põhivalemite abil nimetatakse vahetuks integreerimiseks. Sageli pole aga vahetu integreerimise teel võimalik leida määramata integraali. Sel korral kasutatakse mitmesuguseid integreerimisvõtteid. Üheks enamkasutatavamaks on asendusvõte ehk muutujate vahetuse võte.

Asendusvõtte kasutamine seisneb järgnevas:

1) leitakse vastav tabeliintegraal, mille kujuliseks saab antud integraali teisendada;
2) asendatakse mingi osa integreeritavast funktsioonist uue muutujaga ja kirjutatakse välja asendamiseks vajalik võrdus;
3) leitakse selle võrduse mõlema poole diferentsiaal;
4) avaldatakse sealt endise muutuja diferentsiaal uue muutuja diferentsiaali kaudu;
5) asendatakse integraalimärgi all ka endise muutujate diferentsiaal saadud avaldisega.

Pärast sellist asendust peame saama ühe tabeliintegraalidest, mis sisaldab ainult uut muutujat. Lahenduse lõpetamiseks integreeritakse saadud funktsiooni uue muutuja järgi ning lõpptulemuses asendatakse endine muutuja tagasi.

Integreerime asendusvõttega ehk muutujate vahetusega:

1) $\int \frac{6x-4}{3x^2-14x+8}dx = \int \frac{2(3x-2)}{(3x-2)(x-4)}dx = \int \frac{2dx}{x-4} = \int \frac{2dt}{t} = \ln|t| = \ln|x-4| + C$.

Siin tuleb ruutkolmliige tegurdada, siis taandada. Teha asendus $x-4=t,\ dx=dt$ ja integreerida.

2) $\int 8x\sqrt[3]{x^2-1}dx = \int \frac{8x\sqrt[3]{t}}{2x}dt = 4\int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{4t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = 3t^{\frac{4}{3}} = 3t\sqrt[3]{t} = 3\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x^2-1} + C$.

Asendame $x^2-1=t,\ 2xdx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$.

3) $\int \frac{6x^5dx}{(3x^6+5)^3} = \int \frac{6x^5dt}{18x^5\cdot t^3} = \frac{1}{3}\int t^{-3}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{6t^2} = -\frac{1}{6\left(3x^6+5\right)^2} + C$.

Asendame $3x^6+5=t \Rightarrow 18x^5dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{18x^5}$.

4) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{\sin x\cdot dt}{\sin x\cdot t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\sin x| + C$.

Asendame $\cos x=t,\ -\sin x dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{-\sin x}$.

5) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$;

$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Asendame $2x = t,\ 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

6) $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \frac{\cos x (1 - t^2) dt}{\cos x} = \int (1 - t^2) dt =$

$= t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Asendame $\sin x = t,\ \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$.

Süvendatult matemaatikat õppijad peaksid omandama ka ositi integreerimise kunsti.

Kui u = u(x) ja v = v(x) on diferentseeruvad funktsioonid, siis kehtib nn ositi integreerimisvalem

$\int udv = uv - \int vdu$.

Valemi tõestamiseks kasutame kahe funktsiooni korrutise tuletise leidmise eeskirja. Olgu u =u(x) ja v=v(x) diferentseeruvad funktsioonid mingis piirkonnas X; siis ka korrutis uv on diferentseeruv piirkonnas X, kusjuures

d(uv)= vdu+udv,

millest

udv=d(uv)-vdu.

Integreerime $\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$.

Ositi integreerimisel saab integreeritavat avaldist harilikult mitmel viisil tegurite u ja dv korrutiseks lahutada. Valik tuleb teha niisugune, et valemi paremale poolele jääv integraal oleks lihtsam esialgsest.

Integreerida ositi:

1) $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$,

tähistame $u = \ln x$ ja $dv = dx$, siis $du = \frac{dx}{x}$ ja $v = x$;

2) $\int (2x - 5) \sin x dx = (5 - 2x) \cos x + 2 \int \cos x dx = (5 - 2x) \cos x + 2 \sin x + C$,

tähistame $u = 2x - 5$ ja $dv = \sin x dx$, siis $du = 2dx$ ja $v = -\cos x$;

3) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$,

tähistame $u = x$ ja $dv = e^x dx$, siis $du = dx$ ja $v = e^x$;

4) $\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x dx}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$,

tähistame $u = \ln x$ ja $dv = x dx$, siis $du = \frac{1}{x} dx$ ja $v = \frac{x^2}{2}$;

5) $\int (x + \sin x)\cos x dx = \int x \cos x dx + \int \sin x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx + \int t \cos x \frac{dt}{\cos x} =$

$= x \sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Esimeses liidetavas tähistame $u = x$ ja $dv = \cos x dx$, siis $du = dx$ ja $v = \sin x$.

Teises liidetavas asendame $t = \sin x$, siis $dt = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$, $\int t dt = \frac{t^2}{2} + C$.

6) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln(\cos x) + C$.

Esimeses liidetavas tähistame $u = x$ ja $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, siis $du = dx$ ja $v = \tan x$.

Teine liidetav $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x dt}{t(-\sin x)} = -\ln(\cos x) + C$.

Asendame $t = \cos x$, siis $dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin x}$.

7) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$,

tähistame $u = \ln x$ ja $dv = \frac{1}{x^2} dx$, siis $du = \frac{1}{x} dx$ ja $v = -\frac{1}{x}$;

8) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$,

tähistame $u = \arcsin x$ ja $dv = dx$, siis $du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ ja $v = x$,

nüüd $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{xdt}{t^{\frac{1}{2}}(-2x)} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$,

siin tähistame $t = 1-x^2$, siis $dt = -2xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$;

9) $\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{x^2+1} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$,

tähistame $u = \arctan x$ ja $dv = dx$, siis $du = \frac{1}{x^2+1}dx$ ja $v = x$,

nüüd $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{xdt}{t2x} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$,

siin tähistame $t = x^2+1$, siis $dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$;

12) $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos dx$,

tähistame $u = e^x$ ja $dv = \cos x dx$, siis $du = e^x dx$ ja $v = \sin x$,

nüüd $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$,

siin tähistame jälle $u = e^x$ ja $dv = \sin x dx$, siis $du = e^x dx$ ja $v = -\cos x$;

seega $\int e^x \cos dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos dx$, millest

$2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$.

Viimase ülesande lahendus pakub õpilastele ootamatusi ja naudingut.

Soovitan lahendada huvitavaid ülesandeid, summa integreerimist:

1) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2(x^2+1)+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^2 dx + \arctan x + \frac{x^3}{3} + \arctan x + C$

2) $\int \frac{\sqrt{x^6+x^{-6}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{x^{12}+1+2x^6}}{x^6}dx = \int \frac{\sqrt{(x^6+1)^2}}{x^6}dx = \int \frac{x^6+1}{x^6}dx =$

$= \int (1+x^{-6})dx = x - \frac{1}{5x^5} + C$;

3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan x + C$.

Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine

1) $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x-3}dx = \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C$.

Esmalt tuleb integreeritav murd teisendada osamurdude summaks:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} = \frac{A^{x-3}}{x-1} + \frac{B^{x-1}}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx-B}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}.$$

Saame võrrandisüsteemi: $\begin{cases} -3A - B = -5 \\ A + B = 3 \end{cases}$; lahendades saame A=1 ja B=2.

2) $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{13}{12}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x| + 1\frac{1}{12}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + C$

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A^{x^2+2x-8}}{x} + \frac{B^{x^2-2x}}{x+4} + \frac{C^{x^2+4x}}{x-2} = \frac{Ax^2+2Ax-8A+Bx^2-2Bx+Cx^2+4Cx}{x(x+4)(x-2)} =$$

Saame võrrandisüsteemi: $\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 2A - 2B + 4C = -2 \\ -8A = 2 \end{cases}$; lahendades saame $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{13}{12}, C = \frac{1}{6}.$

3) $\int \frac{x^4+x^2+2}{x^3-7x+6}dx = \int xdx + \int \frac{8x^2-6x+2}{x^3-7x+6}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 4{,}4\ln|x-2| + 4{,}6\ln|x+3| + C.$

Et integraalialuse murdratsionaalse funktsiooni lugeja on kõrgema astme polünoom kui nimetaja, siis eraldame kõigepealt läbijagamisega täisosa:

(x^4+x^2+2): $(x^3-7x+6) = x$;
$\underline{x^4-7x^2+6x}$
$8x^2-6x+2$

Viimase murru teisendame nüüd osamurdude summaks. Selleks lahutame esmalt nimetaja tema nullkohtade abil tegureiks:

$x^3-7x+6=0$; näha on, et üks lahendeist on 1, seega $x_1 = 1$, nüüd jagame:

(x^3-7x+6) :(x-1)= $x^2+x-6 = (x-2)(x-3)$;
$\underline{x^3-x^2}$
x^2-7x+6
$\underline{x^2-x}$
$-6x+6$
$\underline{-6x+6}$

Võib kasutada ka Horneri skeemi 1 0 -7 6

$x_1 =$ 1 1 1 -6 0

$$\frac{8x^2-6x+2}{x^3-7x+6}=\frac{A^{x^2+x-6}}{x-1}+\frac{B^{x^2+2x-3}}{x-2}+\frac{C^{x^2-3x+2}}{x+3}=\frac{Ax^2+Ax-6A+Bx^2+2Bx-3B+Cx^2-3Cx+2C}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Saame võrrandisüsteemi: $\begin{cases} A+B+C=8 \\ A+2B-3C=-6 \\ -6A-3B+2C=2 \end{cases}$, mille võib lahendada, kasutades Wirist /www.wiris.ee/ või vanu häid Crameri valemeid või lihtsalt liitmisvõtet, siit A=-1, B=4,4 ja C=4,6.

Analoogselt 3. ülesandega lahendub ka 4.

4) $\int \frac{2x^3-7x^2+3x+2}{x^2-5x+6}dx=\int(2x+3)dx+\int\frac{6x-16}{x^2-5x+6}dx=x^2+3x+2\ln|x-3|+4\ln|x-2|+C.$

Integraali rakendusi

I Pindala arvutamine integraali abil

Probleem – leida funktsioon tema tuletise järgi – on ajalooliselt väga lähedalt seotud tasandilise kujundi pindala määramise ülesandega. Elementaarmatemaatikas vaadeldakse ainult sirglõikude ja ringi kaartega piiratud tasandiliste kujundite pindala. Suvalise joonega piiratud tasandilise kujundi pindala defineerimiseks ja arvutamiseks osutuvad aga elementaarmatemaatika meetodid puudulikuks. Siin tuleb appi integraal.

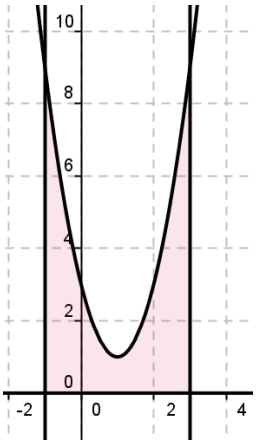
Arvutame kujundi pindala, mida piiravad antud jooned. Teeme joonised:

1) x=-1; x=3; g(x)=0 (x-telg) ja f(x)=$2x^2$-4x+3 (täisnurkne trapets, mille alustega kaldu olev haar on asendatud mingi joone kaarega, on kõvertrapets).

Joonise tegemiseks on vaja leida parabooli haripunkt. Me mööname, et kui on teada funktsiooni nullkohad x_1 ja x_2, siis saame haripunkti abstsissi valemi $x_h=\frac{x_1+x_2}{2}$ järgi. Siin aga on

diskriminant negatiivne ($D=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 3=-8<0$) ja ruutvõrrand seega ei lahendu. Siis tuleb leida x-teljega paralleelne sirge ja lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} y=2x^2-4x+3 \\ y=3 \end{cases}$, siit $2x^2-4x=0;\ 2x(x-2)=0;\ x_1=0$ ja $x_2=2$, siis $x_h=\frac{0+2}{2}=1$. Muidugi, XI klassis õpitud teadmisi kasutades, saame ekstreemkoha esimese tuletise nullkoha abil hoopis hõlpsamini $y'=4x-4$, siit $4x-4=0,\ x_h=1$. Koostame tabeli ja arvutame funktsiooni väärtused, teeme joonise.

x	-1	0	1	2	3
y	9	3	1	3	9



Tuleb rõhutada, et ülemisest joonest tuleb lahutada alumine joon, siin $f(x)\geq g(x)$, seega $f(x)-g(x)$. Rajad on juba ette antud x=-1 ja x=3.

Leiame pindala: $S=\int_{-1}^{3}\left[2x^2-4x+3-0\right]dx=$

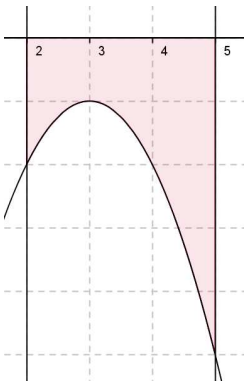
$=\left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{-1}^{3}=18-18+9+\frac{2}{3}+2+3=14\frac{2}{3}$ pindalaühikut.

2) x=2; x=5; f(x)=0 ja g(x)=-x^2+6x-10 (kõvertrapets)

Leiame parabooli haripunkti abstsissi: $y'=-2x+6$, siit $-2x+6=0;\ x_h=3$.

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	1	2	3	4	5
y	-5	-2	-1	-2	-5



Leiame pindala:

$S = \int_2^5 \left[0 - \left(-x^2 + 6x - 10\right)\right]dx = \int_2^5 (x^2 - 6x + 10)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right]_2^5 = 6$ pindalaühikut. Siin on jooniselt kergesti võimalik vastuse õigsust kontrollida (6 ruutu). Tasub rõhutada, et kui pinnatükk jääb täielikult ülespoole x-teljest, siis nulli lahutamine ei muuda ju midagi; ja kui pinnatükk jääb täielikult allapoole x-teljest, võib nullist lahutamise asemel rajad ära vahetada. Siin

$S = \int_5^2 (-x^2 + 6x - 10)dx = 6$ pindalaühikut.

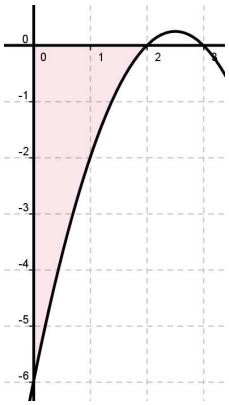
3) x=0; f(x)=0 ja g(x)=(x-3)(2-x)

Leiame parabooli haripunkti abstsissi, selleks y=0: $x_1 = 3$ ja $x_2 = 2$, siit $x_h = \frac{3+2}{2} = 2{,}5$.

Et oleks parem integreerida, teisendame funktsiooni kujule $y=-x^2+5x-6$.

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	1	2	2,5	3	4
y	-2	0	0,25	0	-2



Leiame pindala $S = \int_2^0 \left(-x^2 + 5x - 6\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_2^0 = \frac{8}{3} - 10 + 12 = 4\frac{2}{3}$ pindalaühikut.

Siin raja x=0 on ette antud ja raja x=2 leiame nullkohtadest. Rajasid vahetades jääb pinnatükk täielikult allapoole x-telge, saame ruutfunktsiooni integreerides kohe pindala, st ei pea tegema tehet $0-(-x^2+5x-6)$.

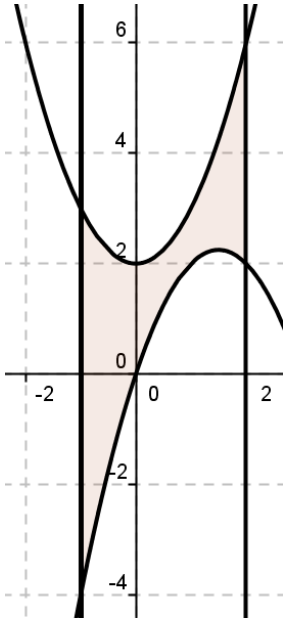
4) x=-1; x=2; $f(x)=x^2+2$ ja $g(x)=3x-x^2$

Leiame paraboolide haripunktide abstsissid: $f'(x) = 2x$, $f'(x) = 0, x_h = 0$ ja

$g'(x) = 3 - 2x, g'(x) = 0, x_h = 1{,}5$

Koostame tabel ja teeme joonise:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6
x	0	1	1,5	2	3
y	0	2	2,25	2	0



Arvutame pindala:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[x^2 + 2 - \left(3x - x^2\right)\right]dx = \int_{-1}^{2} \left(2x^2 - 3x + 2\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 7{,}5$$

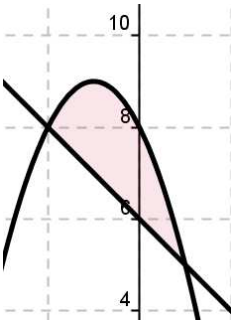
Eelnevates ülesannetes olid rajad ette antud, nüüd vaatleme ülesandeid, kus rajadeks on joonte lõikepunktide abstsissid. Nende leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem.

5) $y=-x^2-2x+8$ ja $y=6-x$

Leiame parabooli haripunkti abstsissi: $y' = -2x - 2, y' = 0, x_h = -1.$

Koostame tabeli ja teeme joonise:

x	-3	-2	-1	0	1
y	5	8	9	8	5
x	0	6			
y	6	0			



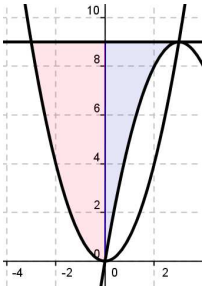
Sirge on määratud kahe punktiga. Leiame rajad:

$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 8 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 6 - x$, millest $x^2+x-2=0$ ja rajad on seega $x_1 = -2, x_2 = 1.$

Arvutame pindala:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - 2x + 8 - (6 - x)\right]dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = 4{,}5 \text{ pindalaühikut;}$$

6) $y=x^2$; $y=6x-x^2$ ja $y=9$. Teeme kohe joonise.



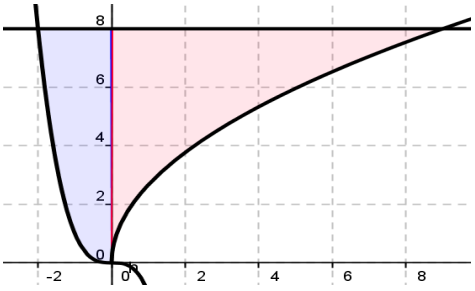
Selle pinnatüki pindala koosneb pindalade summast $S = S_1 + S_2$ või vahest $S = S_3 - S_4$.

$S_1 = \int_{-3}^{0} (9 - x^2)dx = 18$ ja $S_2 = \int_{0}^{3} [9 - (6x - x^2)]dx = 9$,

$S_3 = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx = 36$ ja $S_4 = \int_{0}^{3} (6x - x^2 - x^2)dx = 9$.

Seega S=27 pindalaühikut.

7) $y=-x^3$; $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$ ja $y=8$. Teeme kohe joonise.



Selle pinnatüki pindala koosneb samuti pindalade summast $S = S_1 + S_2$ või vahest $S = S_3 - (S_4 + S_5)$.

$S_1 = \int_{-2}^{0} [8 - (-x^3)]dx = 12$ ja $S_2 = \int_{0}^{9} \left(8 - \frac{8}{3}\sqrt{x}\right)dx = 24$

$S_3 = 8 \cdot 11 = 88$ ja $S_3 = \int_{-2}^{0} (-x^3)dx = 4$ ning

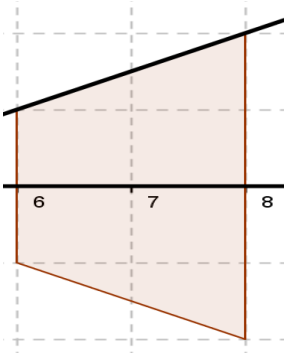
$S_4 = \int_{0}^{9} \left(\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)dx = 48$.

Nagu näha – keerukamaid pindalasid annab arvutada mitmel viisil, kuid piirdume siinkohal sellega. Pindala arvutamiseks jooniste tegemine harjutab õpilast joonestama parabooli, hüperbooli, kuupfunktsiooni graafikut ja sirget.

II Pöördkeha ruumala arvutamine integraali abil

Joontega y=f(x), x=a, x=b ja y=0 piiratud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje moodustuv pöördkeha ruumala avaldub määratud integraalina: $V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx$.

Arvutame pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad jooned 1) y=0,5x-2, x=6 ja x=8. Teeme joonise.



Tekkivaks pöördkehaks on tüvikoonus; arvutame ruumala integraali abil:

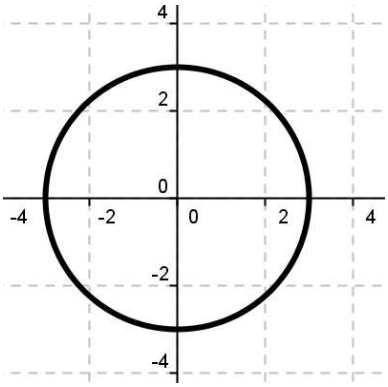
$$V=\pi\int_6^8(0{,}5x-2)^2\,dx=\pi\int_6^8\left(0{,}25x^2-2x+4\right)dx=\pi\left[\frac{x^3}{12}-x^2+4x\right]_6^8=$$

$=4\frac{2}{3}\pi$ ruumalaühikut.

Kasutame tüvikoonuse ruumala valemit $V=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$ ja arvutame, siin h=2, $r_1=1, r_2=2$, seega $V=\pi\frac{2}{3}(1+2+4)=\frac{14}{3}\pi=4\frac{2}{3}\pi$ ruumalaühikut.

Nii on võimalik kõiki pöördkeha ruumala valemeid kontrollida.

2) $x^2+y^2=9$. Teeme joonise.



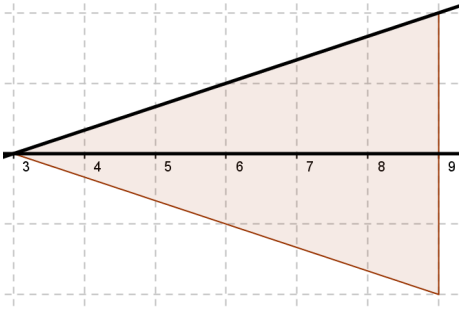
Tegu on ringjoonega. Pöörlemisel tekib kera, mille ruumala valem on $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Siin R=3, seega ruumala

$V=\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi=36\pi$. Kontrollime seda integraali abil $y^2=9-x^2$

$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx=2\pi\int_0^3\left(9-x^2\right)dx=2\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=$$

$=2\pi(27-9)=36\pi$ ruumalaühikut.

3) x-3y-3=0,x=3 ja x=9. Teeme joonise.

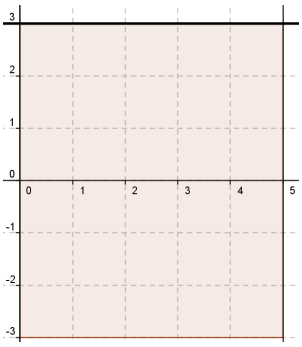


Tegu on koonusega, mille h=6 ja r=2; arvutame ruumala valemi $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ abil. $V=\frac{1}{3}\pi 4\cdot 6=8\pi$ ruumalaühikut.

Kontrollime integraali abil :

$$V=\pi\int_3^9\left(\frac{x}{3}-1\right)^2dx=\pi\int_3^9\left(\frac{x^2}{9}-\frac{2x}{3}+1\right)dx=\pi\left[\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+x\right]_3^9=\pi(27-27+9-1+3-3)=8\pi.$$

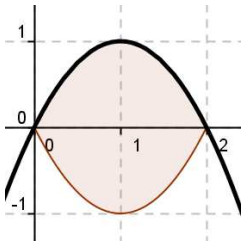
4) Oletame, et on vaja arvutada silindri ruumala, mille raadius on 3 ja kõrgus 5, ning kahtleme ruumala valemis – siis arvutame pöördkeha ruumala, mida piiravad jooned y=3, x=0 ja x=5.



Arvutame ruumala kahel viisil $V = \pi r^2 h$ abil ja integraaliga. $V = \pi \cdot 9 \cdot 5 = 45\pi$ ja $V = \pi \int_0^5 3^2\, dx = \pi \left[9x\right]_0^5 = 45\pi$ ruumalaühikut.

5) $y=2x-x^2$

Integreerimisrajad on siin funktsiooni nullkohad $2x-x^2=0$, $x(2-x)=0$. Rajad $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$.



Teeme joonise.

Arvutame ruumala: $V = \pi \int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) dx =$

$= \pi \left[\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = 1\frac{1}{15}\pi$ ruumalaühikut.

Artiklist jäid välja teepikkuse, jõu töö ja vedeliku rõhu arvutamine – need las jääda ülikooli. Siin lahendatud ja veidi keerulisemate ülesannetega saab hakkama keskmisest tasemest veidi kõrgemal olev õpilaste kogum.

Häid ja väga häid ülesandeid on veel palju, loodan, et saite neist vähestest ülesannetest innustust leida sobilik ülesannete kogu, haarata pliiats ning asuda taasleidma integraali võlusid.

Kasutatud kirjandus

Janno, J (2006). Matemaatiline analüüs I, Tallinna tehnikaülikool.

Jegerev, V. K., Zaitsev, V. V. (1997). Sbornik zadaz po matematike, Moskva.

Kacenovskis, M., Kolagins, J. (1979). Matematika tehnikumiem II, Riga.

Kangro, G. (1982). Matemaatiline analüüs I, Tallinn „Valgus".

Luigelaht, V., Reiman, E. (1978). Matemaatika tehnikumidele, Tallinn „Valgus".

Luigelaht, V., Reiman E. (1995). Matemaatika ülesannete kogu ,Tallinn.

Petersen I., Roos, H. (1960). Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I, Tallinn ERK.

Saldauskiene J. (2005). Taikamoji matematika, Vilnius.

Zaitsev L. (1973). Kõrgem matemaatika õpik tehnikumidele, Tallinn „Valgus".