Kursuse „Tõenäosus ja statistika“ käsitlemisest

Dots. emeeritus Kalle Velsker

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika küsimuste käsitlemine koolis on väga tänuväärne tegevus õpilastele nii teadmiste omandamise kui ka kasvatuslikust, arendavast ja tunnetuslikust seisukohast vaadatuna. Gümnaasiumi riiklikus õppekavas ja selle matemaatika õpetamist puudutavas lisas 3 ei leidu üldpädevusi ega läbivaid teemasid, mille kujundamisele ja käsitlemisele ei saaks kõnealune kursus kaasa rääkida. Olulised on seejuures teooria küsimused nagu mõisted, nendevahelised seosed, eeskirjad, valemid, millega arendatakse näiteks üldistamisoskust (sisuliselt õpipädevuse osa), kujundatakse suhtluspädevust, arendades õpilaste väljendusoskust mõistete sisu ja matemaatiliste arutluste selge ja täpse edasiandmise teel. Teooria kõrval on aga eriti olulised hästi valitud temaatikaga matemaatikaülesanded. Lisaväärtuse annab tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika alasele kursusele asjaolu, et siin tutvustatakse õppijale reaalsuse valdkonda, mis on seotud juhuslike nähtuste ja suurustega. Kogu ülejäänud koolimatemaatika kirjeldab aga reaalsuse osa, kus valitsevad nn determineeritud seosed.

Üldpädevuste kujundamine

Väärtuspädevuse kujundamiseks erinevate inimeste koostöö ja selle tulemuslikkuse aspektist on heaks näiteks tõenäosusteooria tekke ajalugu. Miks mitte lasta sellel teemal lühike ettekanne teha. Tähelepanu köidab siin kindlasti ka see, et tõenäosusteooria tekke ajendiks sai üks hasartmäng, nn täringumäng. Mäng seisnes järgnevas: täringut viskavad kordamööda kaks mängijat; kes saab enne m korda 6 silma, võidab auhinnaks lauale pandud rahasumma, nn panga. Kirglik hasartmängija C. de Mere esitas 1654. aastal B. Pascalile (prantsuse matemaatik, füüsik, filosoof ja kirjanik) küsimuse, kuidas on õiglane jaotada omavahel täringumängu pangas olev raha, kui mäng jääb pooleli (näiteks duelli tõttu) seisus, kus üks mängija on saanud 6 silma $n < m$ korda ja teine $k < m$ korda. Seejärel saatis Pascal oma lahenduse kontrolliks P. Fermat´ile (prantsuse matemaatik), millest arenes kahe teadlase kirjavahetus ja esimeste tõenäosusteooria mõistete, kaasa arvatud tõenäosuse mõiste, kasutusele võtmine. Esimese tõenäosusteooria-alase uurimuse „Arvutustest hasartmängudes“ kirjutas juba 1657. a. aga madalmaade füüsik, astronoom ja matemaatik C. Huygens. Teadlaste ja isegi hasartmängija hea koostöö kasulikkus on õpilastele ilmekas näide sotsiaalse pädevuse kujundamiseks. Lühiettekanded matemaatilise statistika tekkest ja nende matemaatikaharude rakendustest näitavad ka matemaatika tähtsust ja seost reaalsusega ning

aitavad mõista, et teadus on looming, seega üks osa inimkultuurist, mida tuleb väärtustada. Samas teenivad kõnealused lühiettekanded läbiva teema „Kultuuriline identiteet“ eesmärke. Õpilaste enesehinnangu adekvaatne arendamine (enesemääratluspädevuse kujundamine) toimub aga õpetaja ja kaasõpilaste märkuste kaudu ettekannete kohta. Oluline on õpilastes töökuse väärtustamine, millega kaasneb püsivuse ja täpsuse kujundamine. Heaks vahendiks on kõnealuse kursuse raames vajadus manipuleerida rohkete arvudega, vältides seejuures vigu. Töökusest on lähemalt juttu ka seoses õpipädevusega.

Sotsiaalne pädevus tähendab esmajoones vastutustunde kujunemist vanemate ja teiste lähedaste inimeste, kuid samuti kaaskodanike ning kogu ühiskonna ees. Õppimine gümnaasiumis tähendab vabatahtlikult vastutuse võtmist oma õpitulemuste suhtes. Et enesekontrollil on oluline roll enesehinnangu kujunemisel, siis ongi kõnealuse pädevuse kujundamiseks kasulik analüüsida oma õpitulemusi matemaatikas ja mõnes teises aines statistiliste meetoditega. Laia kursuse järgi õppijad võiksid arvutada ka oma klassi kahe aine, näiteks matemaatika ja füüsika või matemaatika ja ajaloo hinnete korrelatsioonikordaja ning teha siis järeldusi kogu klassi kohta, kui tugev on seos vaadeldava ainetepaari hinnete vahel. Kui võtta kaks ainepaari, kas siis on seos tugevam ühe või teise ainepaari korral? Käsitledes ka lineaarset regressiooni (mittekohustuslik teema), võiks iga õpilane arvutada regressioonivõrrandi(d), (võttes sama ainepaari korral kord ühe aine, kord teise aine argumendiks) ning seejärel saadud võrrandi(te)st ühe oma hinde järgi, näiteks selle, mida peab enda kohta õiglasemaks, teise aine nn normikohase hinde. Võrreldes seda tegeliku hindega, saab kriitiliselt hinnata, kas ta õppis alla või üle normi (võimete) antud klassi koosseisu ja õppetingimuste korral. Nii saab õpilane objektiivse hinnangu oma tööle, mis omakorda aitab kujundada õiget enesehinnangut – järelikult ka enesemääratluspädevuse kujundamine. Samas näitab kõik see ka matemaatika vajalikkust ja rakendatavust reaalses elus. Sisuliselt on tegemist uuritava nähtuse matemaatiliste mudelite koostamisega ja nende abil nähtuse edasine uurimine, mis kuulub ka teema “Tehnoloogia ja innovatsioon“ alla. Kirjeldatud analüüsi saab teha rühmatööna (erinevatele rühmadele rühmakaaslaste võimetekohase õppimise ja ainetevaheliste seoste hindamine) või koguni uurimistööna „Õppimise edukus meie klassis“, võttes siis juurde juba kirjeldava statistika karakteristikute mitmekülgse arvutamise ja nendest võimalike järelduste tegemise. Vastutustunnet kaaskodanike ja ühiskonna ees saab kasvatada analoogiliselt eelöelduga, valides vastava sisuga ülesandeid. Näiteks tähelepanelikkust teiste suhtes liikluses aitab kujundada liiklushuligaanide poolt tekitatud avariide statistikaga seotud ülesannete lahendamine, samuti

surmajuhtude ja vigastustega seotud liiklusstatistika kasutamine jne. Oma tervise eest hoolitsemine on kaudselt ka vastutustunde suurendamine koduste (vanemad, perekond), töökaaslaste ja kõigi, kellega kohtutakse, ees. Vastavat kasvatustööd, mis ei tohi olla aga kunagi pealetükkiv, saab jälle teha kõnekate andmetega ülesannete kaudu. Tuleb arvestada, et noor inimene ei ole paljude haiguste ja ohtude suhtes teadlik, mistõttu on kasulik esitada ka tervise suhtes informeerivate andmetega ülesandeid.

Enesemääratluspädevus on väga tihedalt seotud teiste pädevustega, nagu võisime näha juba eespool. Seetõttu ei pruugi midagi spetsiaalset enam välja mõelda. Kui siiski, siis soovitus õhutada kitsa kursuse järgi õppijaid lahendama ka mõningaid laia kursuse ülesandeid (nn Lepmannide õpiku järgi õppides B osa ülesanded), näidates seejuures konkreetselt, milliseid. Laia kursuse järgi õppijatele tuleks aga anda lisaülesandeid lehtedel või siis juhatada õpilasi sobivate ülesandekogude juurde.

Õpipädevus on üks pädevustest, mis on matemaatikas kesksel kohal. Pean siin silmas esmajoones matemaatika pideva õppimise vajadust, mis on üks olulisemaid vajadusi. Selle nõude eiramine viib esialgu matemaatikast mittearusaamisele ja lõpuks matemaatika muutumisele vastumeelseks. Öeldu kehtib loomulikult ka pealkirjas märgitud kursuse korral. Pideva õppimise tagamiseks peab õpetamisel kasutama mitmeid võtteid ja meetodeid, mis ei ole õpilase silmis repressiivsed, kuid ometi sunnivad teda õppima. Üht-teist leiab siin ka vanade võtete arsenalist. Näiteks frontaalne küsitlus. Tehes seda sageli, jäävad aine olulised tõed õpilastele iseenesest meelde. Selleks annab lootust ka uute ainekavade ja õpetamiseks planeeritud aja varasemast parem vastavus. Tunduvalt kergendab uue materjali meeldejätmist samuti see, kui õpetaja eristab olulist ebaolulisest ning selgitab, kuidas uued mõisted ning valemid seonduvad varemõpituga. Näiteks väidavad õpilased sageli, et juhusliku suuruse dispersiooni arvutamise valem on keeruline ja ei jää meelde. Kui ta aga teab, mis on aritmeetiline keskmine, ja õpetaja juhib tähelepanu sellele, et dispersioon on sisuliselt hälvete ruutude aritmeetiline keskmine, on õpilase jaoks ainus uus mõiste hälve. Laia kursuse korral on võimalus, et vaadeldakse ka mõistet ruutkeskmine (kui see leiab rakendamist veel mujal). Sellisel juhul ei ole dispersioon muud kui hälvete ruutkeskmine. Nii paigutub uus mõiste ja vajalik valem õpilase varasemasse teadmiste süsteemi ja ka selle meeldetuletamine on lihtne. Õpipädevuse kujundamisel tuleb arendada analüüsimise ja tulemuste kriitilise hindamise oskust. Võimalusi selleks on siin palju. Näiteks arvutades aritmeetilist või teisi keskmisi, peab tulemus olema alati vähima ja suurima väärtuse vahel. Sündmuse toimumise tõenäosus p peab

ikka rahuldama võrratusi $0 \le p \le 1$. Juhusliku suuruse jaotuse korral peab suhteliste sageduste summa olema 100% või vastavalt tõenäosuste summa 1. Kui ülesandes lastakse arvutada statistilise kogumi arvkarakteristikuid, ei peaks õpilane piirduma vaid nende formaalse leidmisega. Loomulik oleks, et õpilane teeb saadud tulemuste põhjal ka järeldusi kogumi kui terviku või vaadeldava nähtuse kohta.. Kui näiteks paralleelklasside A ja B ühe ja sama kontrolltöö keskmine hinne on 4, kuid klassi A hinnete standardhälve on oluliselt suurem kui klassis B, siis sellega piirdumine oleks ülesande formaalne lahendamine. Õpilane peaks nüüd tegema ka järelduse selle kohta, kumb klass tegi kontrolltöö paremini või kumb klass kui tervik omandas vastava materjali paremini. Kui õpilase N matemaatikahinnete keskmine tuleb 3,2 ja õpilase K keskmine hinne 3,8 ning hinnete standardhälve on õpilasel N oluliselt väiksem kui õpilasel K, on analüüs sügavam, et teha järeldusi õpilaste N ja K õppimise kohta. Ilmselt on õpilane N korralik kolmemees, sest hinded on ühtlasemad (σ on väike) kui õpilasel K. Õpilase K tulemus on parem, aga hinnete diapasoon on suur (σ on suur). Arvatavasti on õpilane K võimetelt neljaline, kuid ei õpi pidevalt või siis kursuse mõnda osa haarab hästi, kuid teatud osadest on arusaamine raskendatud. Niisugust tulemuste analüüsi tuleks klassis teha ka siis, kui ülesandes sellesuunaline küsimus puudub. Ka tõenäosuse mõiste pakub võimalusi tulemuse tähenduse analüüsiks. Näiteks kui mingi loterii korral on võidu saamise tõenäosus 0,99, ütleksime, et praktiliselt iga loos võidab, ehk võitmine on praktiliselt kindel sündmus. Kui aga langevarju avanemise tõenäosus oleks 0,99, ei julgeks nii öelda, sest päeva jooksul hüppavast 100 mehest keskmiselt vaid 99 jõuaks õnnelikult maale. Lõpuks võiks õpilastele esitada intrigeeriva küsimuse: kui suur peaks nende arvates olema langevarju avanemise tõenäosus, et sellega hüppamine oleks turvaline. Käsitledes sündmuste korrutise tõenäosust, on otstarbekas arutleda, milline peab olema näiteks auto käivitusmehhanismi iga käivitamisel osaleva osa (süütelukk, aku, juhtmed, elektromagnetid, mehhaaniline hoovastik jne) rakendumise tõenäosus, et auto käivituks tõenäosusega 0,9997, mis tähendab ühte mittekäivitust (riket) 3333 käivituse kohta. (Andmed on meelevaldsed. Kui pika garantiiaja võib sellisele autole anda käivitamise seisukohalt?) Kuna kõik detailid asuvad käivitamisel korraga tööle, tuleb kogu käivitusmehhanismi töötamise tõenäosuse leidmiseks osade kohta käivad tõenäosused korrutada, mille tulemusena on korrutis väiksem teguritest, sest tõenäosused on alla ühe. Kosmoseraketi korral on asi veelgi hullem, sest korraga töötavaid detaile on oluliselt rohkem. Esitatud situatsioonide analüüsi tulemusena jõuame ka olulisele matemaatilisele järeldusele: üks ja seesama tõenäosus võib ühe sündmuse jaoks olla küllalt suur, teise sündmuse jaoks aga liiga väike.

Suhtluspädevuse kujundamisel matemaatika õpetamisel on olulisel kohal oma mõtete selge, lühida ja täpse edasiandmise arendamine. Sellega tegelemine on tegelikult matemaatika pärisosa igas kooliastmes ülikoolini välja. Nõuavad ju definitsioonide ja teoreemide sõnastused just selgust, lühidust ja täpsust. Koolis tehakse siin tavaliselt teatud mööndusi, eriti lühiduse osas ja suurema selguse huvides. Seda isegi õpikus. Näiteks öeldu sisu jõuab kiiremini kohale, kui defineerida ristkülik rööpkülikuna, mille kõik nurgad on täisnurgad, kui defineerides ristküliku rööpkülikuna, mille üks nurk on täisnurk. Koolis on tähtis, et õpilane mõistab definitsiooni ja teoreemi sisu ning oskab seda adekvaatselt edasi anda. Kui matemaatika laias kursuses püütakse selle poole, et peale sisulise täpsuse – selgusest rääkimata – oleks sõnastus ka võikalikult lühike, siis kitsas kursuses võib õpilane mõiste või teoreemi sisu esitada kasvõi jutustavalt, peaasi, et see oleks sisult õige ja arusaadav. Tegelikult kehtib öeldu igasuguse matemaatilise vestluse kohta nii suulises kui ka kirjalikus vormis. Siit meeldetuletus, et uute ainekavade tingimustes tasuks proovida taastada õpilaste suulise vastamise komme, esialgu kas või vähesel määral. Seejuures oleks loomulik, et lahendades ülesannet tahvlil loeb õpilane kirjutatavat kaasa ja kommenteerib lahendust, nagu teeb seda õpetaja. Nii areneb just oma mõtte väljendusoskus. Oskus oma mõtteid ja informatsiooni edasi anda areneb ka koos statistilistest tabelitest arusaamise ja koostamise ning mitmesuguste diagrammide (sirglõikdiagramm, histogramm jt), samuti graafikute (tõenäosusfunktsioon, tõenäosuse jaotusfunktsioon) lugemise ja konstrueerimisega.Suhtluspädevus on tihedalt seotud õpioskusega, sest matemaatilise teksti lugemine (eriti aga ülesannete lahendamine) on suhtlus. Ülesanne suhtleb õpilasega teksti kaudu ja õpilase vastuseks on ülesande lahendamine. Üsna tihti ei saa õpilane tekstist aru või jääb midagi olulist kahe silma vahele. Sellisel juhul tuleb „küsida“ uuesti, st lugeda jälle ülesannet. Samaga tuleks vastata õpetajal õpilasele, kui õpilane ütleb, et tal on see ja see tehtud, mida ta peab edasi tegema. Kui ka pärast korduvat ülesande lugemist on õpilane raskustes, tuleb loomulikult õpetajal õpilast aidata. On hädalisi rohkem, tuleks ülesande teksti analüüsida klassiga koos. Tekstülesanne on reeglina kontsentreeritud tekstiga ja kirjeldatud olukorrast ei pruugi kohe aru saada. Nii näiteks tekib sageli teatud tõenäosusülesannete korral tõrge, sest teksti esmasel lugemisel ei taipa kohe, kas nõutud tõenäosust saab leida Bernoulli valemi abil või tuleb kombineerida sündmuste summa ja korrutise tõenäosuse valemeid. Sellisel juhul tuleb ikka lugeda teksti, vajadusel korduvalt, analüüsides iga kord kirjeldatud situatsiooni. Suhtluspädevuse olulisteks momentideks on lisaks eelpool nimetatutele ka oskus väljendada end asjakohaselt, oskus oma seisukohti põhjendada ning kaasvestlejaid kuulata. Nende oskuste kujundamisega pole matemaatikas mingeid probleeme, sest kõike seda nõuab

matemaatika ise lausa igal sammul. Kui ka juhtub, et mõni õpilastest lakkab tunnis kuulamast, on matemaatikaõpetajatel kujunenud lausa refleksiks nende õpilaste „tagasi kutsumine tundi“.

„Ettevõttlikkuspädevuse arendamine peaks matemaatikas olema kesksel kohal“ kirjutatakse matemaatika ainekavas. See on nii, sest matemaatika saab selgeks vaid siis, kui õpilane ise mõtleb, otsib ideid ülesande lahendamiseks ja suudab ise lahendada ülesandeid lõpuni. Seejuures on aga tarvis omandada teatav matemaatiliste vahendite hulk – mõisted, seosed, reeglid, valemid – ilma milleta pole võimalik isegi mõelda, probleemide lahendamisest rääkimata. Kui matemaatilise statistika osas on reeglina selge, eeldades vastavate mõistete ja valemite tundmist, kuidas ülesannet lahendada, siis sündmuse tõenäosuse leidmisel tuleb sageli pikalt arutleda ja proovida läbi erinevaid lähenemis- ning lahendusviise, et õiget tulemust saada. Lahenduskäik, mis tuleb põhjaliku arutluse tulemusena paberile panna, on seejuures reeglina väga lühike. Põhiline aeg niisuguste ülesannete lahendamisel kulub arutluseks, mõtlemiseks. On pikemata selge, et selliseid arutlusi tuleb esialgu korraldada kogu klassiga koos, lastes erinevaid lahendusideid genereerida õpilastel endil. Seejuures aga ei tohi isegi ilmset ebasobivat ideed kohe kõrvale heita ilma kaasõpilaste või õpetajapoolse põhjenduseta. Õpilase leitud lahendusidee realiseerimist tuleks esmalt pakkuda autorile, kuid mitte sundida teda selleks. Sellisel ülesannete lahendusviisil on oma „oht“. Lisaks ajakulule, mis siiski pikas perspektiivis edu tagab, on võimalik, et õpilane pakub välja ülesande lahendusidee, mille peale õpetaja ei ole varem tulnud, ja kui nüüd ka idee autor ise ega kaasõpilased ei oska arusaadavaid selgitusi anda, kardab õpetaja rumalaks jääda. Üldiselt peaks õpetaja riskima ja kui kindlat otsust selle idee kohta pole suudetud leida, ütleb õpetaja, et uurin asja kodus ja ütlen homme (või hiljem). Nüüd peab aga õpetaja lubadust meeles pidama. Kui tunnis veel aega jätkub, tuleks vaadata teisi ideid, ka õpetaja poolt leitud lahendust. Niisugune õpetajapoolne käitumine tegelikult tõstab õpetaja autoriteeti ning annab õpilastele julgust oma ideedega välja tulla. Kirjeldatud ja tegelikult paljudel õpetajatel ammu kasutusel olev tööviis probleemsete ülesannete lahendamisel arendab õpilasi tugevasti ja varsti suudab enamik klassist ka iseseisvalt samasuguseid ülesandeid lahendada.

Rääkides üldpädevustest on kummaline, et nende seas ei ole kodumaa-armastust. Seda pole mainitud ka ühegi loetelus oleva pädevuse alateemana, kuigi sageli tarvitsenuks vaid sammukese edasi minna ja jõudnukski kodumaa-armastuseni. Kas tõesti kaasajal kardetakse sõnu *kodumaa-armastus, isamaa-armastus, sünnimaa-armastus* ja okupatsiooniaegse nõukogude inimese kujundamise asemele on teise 20-aastase iseseisvusaja

jooksul tulnud kosmopoliitide kujundamine. Usun siiski meie kooliõpetajatesse ja loodan, et mis jäi tegemata haridusjuhtidel ja -korraldajatel, teevad ära õpetajad. Nii on olnud ja on. Väga head võimalust pakub selleks ka matemaatika ja eriti loomulikult teema „Tõenäosus ja statistika“. Kui kasutada matemaatiliste küsimuste käsitlemisel statistilisi andmeid demograafiast, Eesti majandusest, keskkonnahoiust jm põhinevaid ülesandeid ning kujundada õpilastes vastutustunnet ja austust teiste inimeste suhtes, nagu eespool ja järgnevas räägitakse, on juba palju tehtud kodumaa-armastuse osas. Tuleks vaid lisada, et austust ja lugupidamist väärib ka sünnimaa oma kultuuri, looduse, arengu ja keerulise ajalooga. Ajaloost teame, et sõja ajal lahkus Eestist palju eestlasi välismaale, kuid nad jäid oma sünnimaale truuks, muretsesid ja tegutsesid sünnimaa parema käekäigu nimel ning paljud abistasid taasiseseisvunud Eestit nõu ja jõuga. Miks peaks kaasaegses noores mitte kujundama armastust sünnimaa vastu, sõltumata sellest, kus ta tulevikus elab.

Läbivate teemade käsitlemine

Õppekava üldosas toodud läbivate teemade käsitlemisest oli osaliselt juttu üldpädevuste juures. Järgnevalt kõnealustest teemadest mõnevõrra lähemalt.

Teema „Elukestev õpe ja karjääriplaneerimine“ tähendab tegelikult valmisolekut õppida ja täiendada end pidevalt erialal (üks eeldus ametiredelil kõrgemale astmele tõusmiseks), milleks end ette valmistati õpingute käigus, kuid ka valmisolekut ümberõppeks hilisema töötuse olukorras või juhul, kui omandatud eriala enam ei paelu või koguni tervis ei luba jätkata endist tööd. Kõige selle eelduseks on omakorda iseseisva õppimise oskus ja selle vajalikkuse tajumine, samuti ka õige enesehinnangu kujunemine, et mitte enese alahindamise tõttu loobuda pakutud edutamistest – või vastupidi – oht sattuda ebakompetentsuse tasandile võimete ja oskuste ülehindamise korral. Iseseisva ja pideva õppimise ning õige enesehinnangu kujundamisest oli juttu eespool. Õpilaste veenmine selles, et elukestev õpe on vajalik ja peaaegu paratamatu, saab toimuda vastava statistilise materjali abil elust enesest. Nende andmete (töötute arv ja protsent Eestis ja maakonniti, töötute jaotumine majandusharude järgi jne) põhjal sobivate ülesannete koostamine on jõukohane igale õpetajale. Ülesannete veenmisjõud ja kasvatuslik mõju on veelgi suurem, kui ülesande lahendamisele järgneb vestlus ülesandes esitatud teemal. Järgnevalt näitena üks mõttevälgatus seoses tööpuudusega. Kui töötus Eestis on 12%, tähendab see, et kohates tänaval töövõimelist inimest on tõenäosus, et tal ei ole tööd $\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$. Nüüd võiks arutelu minna edasi teemal, kellel töötajatest hariduse,

erialade, geograafiliste piirkondade jne järgi on suurem tõenäosus töötuks jääda. Kasulik on, kui õpetajal on vastavad näitajad (kasvõi osaliselt) eelnevalt teada.

Teema „Keskkond ja jätkusuutlik areng“. Vastavate probleemide tutvustamine ja arutlus nende ümber saab põhiliselt toimuda loodusressursside olemasolu ja senise kasutuse kohta käivate andmete kaudu. Vajalik on leida andmeid ja nende baasil koostada kirjeldava statistika alaseid ülesandeid alternatiivsete võimaluste, näiteks tuule ja vee jõul elektri tootmine, kohta jne. Analoogilisi andmeid ja ülesandeid oleks tarvis ka taastumatu ja taastuva loodusvara, näiteks põlevkivi ja hakkepuit, kasutamise kohta elektri tootmisel. Ja ikka väike vestlus või aja puudusel vaid vihjed vastavate keskkonnakaitse, jätkusuutliku elu ja Eesti majanduselu probleemide kohta. Selles kontekstis on ju probleemiks Eesti põlevkivivarude suurus, selle kulutamise intensiivsus ja otstarve (milleks ja palju) ning jätkumine järgnevatele põlvkondadele. Põlevkivi kaevandamist, loomulikult ka teisi majandusstatistilisi näitajaid, võiks võrrelda ka varasemate aegadega. Järgnevalt näitena põlevkivi tootmine aastatel 1919 kuni 1937 õpiku: A. Kasvand, J. Lang, O. Paas „ Matemaatika õpik, 6. õppeaasta“ 8. peatüki 7. ülesande andmetel. „Põlevkivi toodeti meil 1919. a. 10 000 tonni; 1923. a. 209 900 t; 1925. a. 288 100 t; 1927. a. 397 600 t; 1929. a. 517 600 t; 1931. a. 499 500 t; 1933. a. 500 000 t; *1935.* a. 604 300 t ja 1937. a. 1 126 000 t.“ Siin sobiks küsida kõiki juba põhikoolis õpitud kirjeldava statistika arvkarakteristikuid. Leidnud nende aastate keskmise toodangu suuruse, võiks selle abil arvutada põlevkivi oletatava kogutoodangu aastate 1919 – 1937 kohta. Seda tuleks omakorda võrrelda kaevandamisega kaasajal. Eesti üks olulisemaid loodusvarasid vääriks koolis ka bioloogia, keemia, füüsika, matemaatika ja isegi ajaloo ühisettevõtmist projekti, ilusa õhtu, konverentsi jne vormis, kus ettekandjad/kirjutajad oleksid põhiliselt õpilased. Ajaloo osa ei tohiks seejuures alahinnata, sest näiteks vastuse põlevkivitoodangu järsu kasvu (aastail 1919 kuni 1923 vähemalt 20-kordne) või languse (vähemalt aastateks 1931 – 1933) põhjuste kohta leiab just sealt. Selliste suurte probleemide kõrval ei tohi ära unustada näiliselt väikseid asju, millest tegelikult sõltub väga palju. Esmajoones tuleb siin tähelepanu pöörata nn olmeprügile. Mis siis saaks, kui kõik see laotada ühtlase kihina piirkonda, kust see aasta jooksul koguti, või linnaümbrusesse metsa, põldudele. Vastusest tuleneb vajadus prügi sorteerida ja vähemalt osaliselt taaskasutusse suunata, lisaks biokütteks jm. Statistilisi andmeid vastavate arvutuslike ülesannete koostamiseks leiab statistilistest väljaannetest ja meediast. Iga õpilase tasandil tähendab see korra ja puhtuse hoidmist oma ümbruses ning tarbetu tarbimise vältimist. Teemakohased arvutused ja arutlused kergendavad õpilasel vastavate tõekspidamiste omaksvõtmist.

Teema „Kultuuriline identiteet“ üheks oluliseks ideeks on inimkonna ühine kultuuripärand. Seda aitab õpilastel mõista matemaatika poolelt ka tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika tekke ja arengu ajalugu, millest oli osaliselt juttu seoses väärtuspädevusega. Mitmete maade ja rahvaste esindajad on sellesse oma panuse andnud. Tõenäosusteooria ajaloo osas võiks eespool nimetatud isikutele lisada Šveitsi matemaatiku Jacob Bernoulli, kellenimeline valem on kooliõpikus ja Vene matemaatiku A. Kolmogorovi, kelle tööde tulemusena muutus möödunud sajandi esimeses pooles tõenäosusteooria range ülesehitusega kaasaegseks teaduseks. Seega on tõenäosusteooria näol tegemist suhteliselt noore teadusega, mille algus on jõudnud koolimatemaatikasse. Tegelikult ka matemaatiline statistika kujunes 20. saj. alguses iseseisvaks matemaatika osaks. Matemaatilise statistika ajaloos tulevad sisse sakslased G. W. Leibniz (filosoof, füüsik ja matemaatik) ning C. F. Gauss (matemaatik, astronoom ning füüsik), hiljem ka inglased. Matemaatilise statistika küsimuste käsitlemisel tuleks kindlasti kasutada ülesandeid rahvaloenduste andmetega. Eesti elanikkonna jaotumine rahvuste järgi on hea näide kvalitatiivsest juhuslikust suurusest (rahvus). Tegelikult on neid ülesandeid kasutuses olevates õpikutes, kuid lisada tuleks sõjaeelse Eesti ja taasiseseisvunud Eesti rahvaloenduse andmeid. Nende kõrvutamisel selgub ilmekalt, mis juhtus Eesti rahvaga sõja ajal. Samas tuleks pöörata tähelepanu sellele, et juba 1925. aastal andis Eesti kultuuriautonoomia taotlemise õiguse vähemusrahvastele, keda oli vähemalt 3000 inimest. Juudid ja sakslased taotlesid ja said endile kultuuriautonoomia, venelased ja rootslased seda ei taotlenud. Kultuuriautonoomia võimaldas Eestis väikerahvastel oma kultuuri paremini säilitada ja arendada ning anda ja saada osa Eesti ühisest kultuuriruumist. Teema lõpetuseks ülesanne põhikoolis õpitu kordamiseks. *Aastal 1897 oli Tallinnas 58 810 elanikku, nendest 68 % eestlased, 17,5 % sakslased, 10,2 % venelased ja ülejäänud muudest rahvustest. 1934. aastal oli aga Tallinnas 137 792 elanikku, nendest eestlasi 85,8 %, sakslasi 4,8 % ja venelasi 5,8 %. Joonestage samasse teljestikku erinevate aastate kohta tulpdiagramm suhteliste sageduste järgi ja märkige iga tulba kohale vastavast rahvusest inimeste arv. Mitme inimese võrra muutus erinevast rahvusest elanike arv 37 aasta jooksul? Millised tähtsamad Eesti ajaloo sündmused jäävad nimetatud aastatesse?* Võimalik vestlus teemadel, mis teenib isamaalise kasvatuse eesmärke.

Läbivat teemat „Kodanikualgatus ja ettevõtlikkus“ on võimalik kursuse „Tõenäosus ja statistika“ raames käsitleda ja selle kaudu arendada õpilaste algatusvõimet ning ettevõtlikkust. Seda saab põhiliselt teha sobivate uurimistööde ja projektide kaudu. Kuigi nendest oli juttu

seoses läbiva teemaga „Keskkond ja jätkusuutlik areng“ ning sotsiaalse pädevusega, lisaks veel mõningad täpsustused. Laia kursuse järgi õppijad võiksid teha koonduurimuse teemal „Erinevate ainete õpitulemuste vahelised seosed meie klassi andmetel“. Klassi õpilased võiks jaotada kahe- või kolmekaupa rühmadesse ja iga rühm peaks uurima 2 – 3 ainepaari korral õpitulemuste seose tugevust. Kui seos osutub tugevaks, tuleks leida ka regressioonisirged, et igaüks saaks leida, kas ta õpib mõnda ainet alla või üle oma võimete klassi kui terviku seisukohalt. Ainepaaride valik võiks olla vabatahtlik, kuid mitte korduv. Ainete valikul tuleks rõhutada, et üheks aineks ainepaaris ei pea olema matemaatika. Kuna koondhindeid ainetes tavaliselt enam ei esine, võiks selleks võtta juba läbitud kursuste hinnete aritmeetilise keskmise ümardatud täisarvudeks või siis anda täpsusega 0,5. Loomulik on, et lisaks uuritavate ainete aritmeetilistele keskmistele ja standardhälvetele, mida läheb nagunii tarvis, leitakse ka mood ja mediaan. Kui klassis on tütarlapsi ja noormehi enam-vähem võrdselt ja klassi õpilaste arv on näiteks üle kolmekümne, oleks huvitav teha uurimus tütarlaste ja noormeeste kohta eraldi. Rühmade uurimustulemused võiks olla vormistatud kirjalikult ja kui asi õnnestub, panna need ühiste kaante vahele. Kas kirjalikult tuleb esitada ka lühike lahenduskäik, otsustab muidugi õpetaja. Samuti on küsimusega töö hindamisest. Samas on hea hinnata rühmade või üksikõpilaste püüdlikkust, töökust, täpsust, korralikkust

Teema „Tehnoloogia ja innovatsioon“ kujuneb koolis tervikuna – seega ka koolimatemaatikas – üha tähtsamaks. See on ka loomulik, sest töökeskkonnas ja üldises elukeskkonnas üha suureneb vajadus osata eesmärgipäraselt kasutada nüüdisaegseid tehnoloogiaid. Järelikult peab kool kujundama valmisolekut kõigeks selleks. Matemaatikas saab koolis kujundada uuritava nähtuse matemaatilise mudeli olemusest arusaamist, mudeli vajaduse mõistmist ja teatud juhtudel ka selle mudeli koostamise oskust ja mudeli abil nähtuse uurimist. Üldiselt peaks õpilastel olema mingi ettekujutus mudelitest, sest näiteks iga võrrand või muutujat sisaldav võrratus, mis on tekstülesannete lahendamisel koostatud, on ülesandes kirjeldatud nähtuse, olukorra, protsessi mudel. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika teema käsitlemisel on juba iga juhusliku sündmuse tõenäosus selle sündmuse mudel sündmuse esinemiskindluse seisukohalt üksikkatsel. Õpilaste jaoks on kindlasti rohkem mudel näiteks binoomjaotuse valem, kui tõenäosused p ja q on valemis fikseeritud (sisuliselt tõenäosuse jaotusfunktsioon teatud diskreetsel juhul). Kahe juhusliku suuruse vahelist seost kirjeldab aga vastav mudel – lineaarne regressioonivõrrand.

Teema „Teabekeskkond“ seisukohalt on oluline – lausa kohustuslik – arendada kõnealuse koolimatemaatika teema raames õpilaste kriitilist meelt teabe, eriti meedias esitatu suhtes. Vead ja väärad seisukohad jõuavad meediasse mitmel viisil. On inimlikke eksitusi, mis on sageli niivõrd läbipaistvad, et viga tekitab rohkem nalja kui arusaamatust. Esineb vigu, mis tekivad kirjutaja vähestest teadmistest matemaatilise statistika osas. Nii näiteks kasutatakse vahel aritmeetilist keskmist seal, kus peaks kasutama mediaani, mis on äärmuslike väärtuste suhtes vähemtundlik kui aritmeetiline keskmine. Ega asjatult ei hinnatud mõningate spordivõistluste korral, kus hinnanguid andsid eksperdid, kord, et üks parim ja halvim hinne tühistatakse ning ülejäänutest leitakse aritmeetiline keskmine. Äärmuslikud hinded võisid olla kohtunikel isiklikel motiividel antud. Sobinuks ka kõigi hinnete mediaan. Kui aga kellegi poolt on ajakirjanduses meelega esitatud valed andmed ja seda varjatakse lisaks veel viitega vastavale statistilisele suurusele, on tegemist sihiliku petmisega. Nii arvatavasti toimitakse vahel, kui räägitakse töötajate keskmisest palgast, jättes ütlemata, et töölisi on ettevõttes suhteliselt vähe ja madalapalgaliste tööliste sekka on arvatud ka kõrgepalgaline juhtkond. Sellisel juhul, nagu kinnitab ka matemaatiline statistika, on õigem keskmise palga näitaja jälle mediaan. Õnneks on ajakirjanduses selles osas märgata olukorra paranemist. Üsna tihti räägitakse kirjeldatud juhtudel juba nn mediaanpalgast. Kui õpetaja on talletanud materjali matemaatilise statistika meetodite või näitajate valest käsitlemisest ja esitamisest, on hea nendega illustreerida arutelu kriitilisest teabeanalüüsist. Öeldu on tegelikult vaid üks osa veelgi tähtsamast oskusest – oskus igasugust numbrilist teavet mõista ja sealt õigeid järeldusi teha. Selleks pakub just statistika häid võimalusi. Lisaks tutvub õpilane nõnda ka elu mitmesuguste valdkondadega.

Teemat „Tervis ja ohutus“ puudutasime juba sotsiaalse pädevuse juures. Pole kahtlust, et see temaatika on tähtis igale inimesele nii isiklikus kui ka sotsiaalses plaanis. Ja olgugi, et sellest räägitakse spetsiaalses õppeaines (inimeseõpetuses), on ikka hea, kui õpitav leiab toetamist ka teistes ainetes. Pealegi pakub see temaatika sobivat materjali (enamlevinud haigused, suremus nendesse, liiklusõnnetused jalakäijatega, mootorsõidukitega, suremus liiklusõnnetuste korral, õnnetused tööl, tööohutus) vastavate diagrammide, graafikute ja statistiliste andmete tabelite näol matemaatika enda õpetamiseks. Nii kitsa kui ka laia koolimatemaatika ainekavas võiks olla ka nn suremustabel ehk elutabel (ka üleelamistabel), mille järgi saab leida tõenäosust, et valitud vanuses inimene elab üle veel mingi arvu aastaid. Suremustabeleid uuendatakse reeglina iga rahvaloenduse järel, sest keskmine eluiga, seega ka üleelamistõenäosus, muutub aja jooksul. Kõnealuseid tabeleid kasutatakse näiteks elukindlustuse osamaksete arvutamisel.

Kui meeste ja naiste keskmised eluead on väga erinevad (selgub täpsemalt rahvaloendusel), kasutatakse erinevaid suremustabeleid meeste ja naiste kohta. Kõik sellised tabelid on erinevates vanustes olevate inimeste, sisuliselt Eesti elanikkonna, üleelamise matemaatilised (numbrilised) mudelid. Uurides elanikkonna haigestumisi ja haiguste kulgu, koostatakse haigestumise tõenäosuste tabeleid, mida läheb tarvis näiteks haiguskindlustuste sõlmimisel. Kui õpetajale satub kätte statistilisi andmeid tervisliku toitumise kohta, tuleks ka nende andmete alusel koostada ülesandeid. On ju suurel määral tervise eest hoolitsemine inimese enda käes ja kui ühiskonnas valitseb seisukoht, et popp on olla terve, on tervete eluviiside harrastamiseks eesmärk olemas.

Teema „Väärtused ja kõlblus“ väärtuste poolelt oli juttu seoses väärtuspädevusega. Kõlbluse aspektis saab matemaatika tundides, sõltumata teemast, tähelepanu pöörata hoolsuse, täpsuse, korrektsuse, järjekindluse, püsivuse ja aususe kujundamisele. Matemaatilise statistika osa käsitlemisel nõuavad seda tegelemine arvude massiividega, suhteliselt pikad arvutused, diagrammide ja graafikute korrektne konstrueerimine empiiriliste andmete järgi. Nagu ikka, on siin oluline õpetaja eeskuju. Kui õpetaja kirjutised ja joonised tahvlil on igati korrektsed, hakkavad õpilased isegi märkamatult samuti vihikusse kirjutama ja joonestama. Võib-olla vaid mõnele noormehele tuleb aeg-ajalt meelde tuletada korraliku kirjutamise ja joonestamise eeliseid.

Aine käsitlemine

Asudes käsitlema ainekavakohast teemat „Tõenäosus ja statistika“, võiks esmalt selgitada, et nn suure matemaatika seisukohalt on koolis tegemist matemaatika ühe haru – tõenäosusteooria – ja sellega tihedalt seotud matemaatilise statistika esmaste mõistete ja seostega. See on matemaatika osa, mille abil leitakse seaduspärasusi ja seoseid juhuslikkuse (juhuslikud sündmused ja juhuslikud suurused) valdkonnas. Kui matemaatiline statistika koos tõenäosusteooriaga annab üldise teooria juhuslikkuse uurimiseks, andmete kogumiseks, töötlemiseks ja tulemustest järelduste tegemiseks, siis seda rakendades elu erinevates valdkondades on välja kujunenud spetsiaalsed teooriad. Nii näiteks tegeleb majandusstatistika majanduses esinevate protsesside kirjeldamise, uurimise ja analüüsiga. Tuntakse ka kitsamate majandusharude teooriaid nagu tööstusstatistika, põllumajandus-statistika, kaubandusstatistika, veondusstatistikat, rahvastikustatistika jt. Matemaatilise statistika meetodeid kasutatakse ka ajaloos, füüsikas, meditsiinis jm. Tõenäosusteooria ja matemaatilise

statistika tekke ajaloo tutvustamisest oli juttu eespool. Sellele võiks lisada ka kombinatoorika ning selle tekke põgusa tutvustamise.

Kõnealust kursust saab sisemiselt üles ehitada mitmeti. Neist ratsionaalsemad järjestused on järgmised kaks: 1) kombinatoorika, tõenäosusteooria elemendid ja matemaatilise statistika küsimused koos tõenäosuse mõiste rakendamisega jaotuste korral; 2) kirjeldava statistika küsimused (suuresti põhikoolis õpitu kordamine), kombinatoorika ja tõenäosusteooria elemendid koos matemaatilise statistika küsimuste edasiarendusega. Järgnevas on esitatud temaatika peamiselt esimest varianti arvestades.

Kombinatoorika küsimuste käsitlemisel on otstarbekas alustada nii kitsa kui ka laia matemaatika õppekava korral kombinatoorika liitmis- ja korrutamislausest. Need laused on lihtsad ja arusaadavad ning võimaldavad lahendada mitmesuguseid ülesandeid erinevate võimaluste arvu leidmisele. Juba siin võiks õpilaste tähelepanu pöörata sellele, et tavaliselt kasvab erinevate võimaluste arv objektide arvu suurenedes kiiresti. Kui näiteks kolm sõpra lähevad koos kinno, on erinevaid kõrvuti istumise variante $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, nelja sõbra korral 24, viie sõbra korral juba 120 ja kuue sõbra korral koguni 720. Kui aga kino ühe rea, kus on 20 kohta, täidavad sama klassi õpilased, on erinevaid istumise variante $20! = 2{,}432902008 \cdot 10^{18}$. Seoses faktoriaali mõistega tuleb selgitada, et 1! = 1 ei tulene faktoriaali definitsioonist, sest ühe teguriga korrutist pole olemas. Küll aga tuleb lugeda (st senisele lisaks defineerida) 1!=1, kui soovime, et ühe elemendi korral saame permutatsioonide arvu 1 leida ka valemi $P_n = n!$ abil. Analoogiline on olukord sümboliga 0!, kui soovime leida suurust C_n^k juhul k = n või suurust V_n^k juhul k = n = 1.

Matemaatika kitsas kursuses tuleb ühenditest käsitleda permutatsioone ja kombinatsioone, laias kursuses lisaks ka variatsioone. See ei tähenda, et kitsa kursuse korral ei saa lahendada ülesandeid, mis on mõeldud lahendamiseks variatsioonide abil. Kehtib ju seos $V_n^k = C_n^k \cdot P_k$, järelikult võib esmalt leida vastava kombinatsioonide arvu C_n^k ja seejärel korrutada viimane permutatsioonide arvuga k elemendist. Põhjenduse selleks leiab ülesandest endast. Vaatame sellekohast ülesannet. *Koosolekul on 60 inimest. Koosoleku läbiviimiseks tuleb nende seast valida koosoleku juhataja, protokollija ja nn lihtliige. Mitu erinevat varianti on nimetatud kolme isiku valimiseks?* Ülesannet saab lahendada mitmeti. 1) Koosoleku juhatuse valimisel on oluline, kes valitakse ja kes millise ameti saab. Teisiti öeldes on tegemist ühenditega, mis

erinevad omavahel kas elementide või nende järjestuse poolest. Seega on tarvis arvutada variatsioonide arv V_{60}^{3} = 205320. 2) Leiame esmalt, mitu erinevat 3-liikmelist koosoleku juhatust (järjestus ametite järgi ei ole momendil tähtis) on võimalik valida. Ilmselt on see arv C_{60}^{3} = 34220. Iga juhatuse koosseisu korral on võimalik ameteid jagada P_3 = 3! = 6 erineval viisil, seega on koosseisu või ametite poolest erinevaid variante 6 · 34220 = 205320. 3) Ülesanne lahendub ka kombinatoorika korrutamislause põhjal. Kui alustada koosoleku juhataja valimisest, on selle koha täitmiseks võimalusi 60. Teise isiku, näiteks protokollija valimiseks jääb nüüd 59 võimalust ja lõpuks kolmanda isiku valimiseks 58 võimalust. Kuna valik tuleb teha põhimõttel nii juhataja, kui ka protokollija, kui ka lihtliige (lühiduse mõttes tähistatakse seda valikuviisi kirjutisega *nii… kui ka* …), siis on tegemist korrutamislausega ja otsitav arv on 60 · 59 · 58 = 205320. Viimane võimalus nähtub ka variatsioonide arvu arvutamise valemist kujul

$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, kus võrduse paremal pool on *k* tegurit.

Üks asi on osata arvutada erinevate ühendite arvu, teine aga oskus neid välja kirjutada. Seejuures nõuab – kuid ka arendab – kirjutamine leidlikkust, täpsust, tähelepanelikkust ja kannatlikkust, esmalt siiski oskust kavandada plaan/süsteem, mille järgi ühendeid kirjutada. Lisaks peitub selles tegevuses ka meelelahutuslik moment. Järgnevalt sellekohane näide. *Igale kaardile neljast on kirjutatud üks tähtedest A, E, K, R. Mitu neljatähelist „sõna“ saab neist kaartidest moodustada? Kirjutage välja kõik need neljatähelised „sõnad“ Millistel neist on juba tähendus?* Kui „sõnade“ kirjutamist teha nii, et esialgu „sõna“ lõpus olev täht tõsta iga kirjutamisega üks samm vasakule, kuni see täht jõuab esimeseks, ja siis alustada jälle lõpus oleva tähega, saab 24 „sõnast“ 12 hästi kätte. Edasine osutub aga tülikamaks ja paratamatult tekib nüüd küsimus, kas ei ole paremat süsteemi. Heaks plaaniks osutub see, kus ühte tulpa kirjutatakse tähega A algavad „sõnad“, teise tulpa tähega E algavad „sõnad“ jne. Nii saadakse 4 tulpa, igas 6 „sõna“ (6 = 24 : 4, aga ka seetõttu, et igas tulbas saab esimesele tähele järgnevat kolme tähte ümber paigutada 3! erineval viisil). Kui ülesandes kirjeldatud situatsioon on keerulisem, tuleb sageli vajalikku ühendite arvu leida just sobiva väljakirjutamisplaani abil. Näiteks: *Mitu neljakohalist 5-ga jaguvat arvu on võimalik kirjutada numbrite* 0, 1, 2, 5 *abil, kasutades neid numbreid igas arvus vaid üks kord?* Nõutud neljakohalised arvud saavad alata vaid numbritega 1, 2, ja 5 ning lõppeda numbriga 0 või 5. Numbriga 1 algavaid arve on 4, sest arvust 1025 saame ülejäänud 1-ga algavad arvud kahe keskmise numbri vahetamisel ja lisaks 0 ja 5 igakordsel vahetamisel. Samuti on 2-ga algavaid arve 4, kuid 5-ga algavaid arve on vaid 2, kuna numbreid 5 ja 0 vahetada ei saa. Seega kokku

10 nõutud tingimusi täitvat arvu. Niisugused mõtteviisid õpetavad õpilast loogiliselt arutlema ja ülesandele sobivat lahendusviisi leidma. Kui õpilane hakkab tundma suuremat huvi kombinatoorika vastu, võiks talle anda mitmekesisemaid ülesandeid või juhatada ta kordumistega ühendite ning nn poolfaktoriaalide n!!, kus n on paarisarv või paaritu arv, juurde.

Tõenäosusteooria osa algab traditsiooniliselt juhusliku, kindla ja võimatu sündmuse käsitlemisega. Õige pea tuleb küllalt palju mõisteid, mis ei ole oma olemuselt keerulised, aga tükivad sageli õpilastel segamini minema. On ka mõisteid, mida tuleks kitsa kursuse raames vältida. Näiteks elementaarsündmus ja elementaarsündmuste ruum. Piisab, kui selle asemel räägitakse vaid vaadeldava sündmuse A jaoks soodsatest ja mittesoodsatest juhtudest ning kõigist võimalustest (juhtudest). Küll peaks aga selgitama üksikjuhtude võrdvõimalikkust ja näitama selle vajalikkust tõenäosuse arvutamisel. Sellekohaseks heaks näiteks on ajalooline ülesanne, mille lahendamisel on eksitud isegi matemaatikud juba ammustel aegadel. Ülesanne on järgmine. *Kui suur on tõenäosus, et kahe samasuguse mündi viskamisel tuleb ühel mündil kull ja teisel kiri* ? Valele tulemusele jõuti järgmise mõttekäiguga: kuna kõiki võimalusi on kolm, mõlemal mündil kiri, ühel kiri ja teisel vapp, mõlemal vapp, millest meid huvitavaid juhte on üks, siis p = $\frac{1}{3}$. Ometi tuleb aga katsete tegemisel kiri-vapp sagedamini esile kui seda lubab saadud tõenäosus. Eksimise põhjuseks on üksikjuhtude võrdvõimalikkuse nõude mittearvestamine. Võrdvõimalikke üksikjuhte on tegelikult neli: mõlemal mündil kiri, mõlemal mündil vapp, I mündil kiri ja II vapp, I mündil vapp ja II kiri. Järelikult on otsitava tõenäosuse õige väärtus $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Lisaks sündmuse üksikjuhtude (laias kursuses elementaarsündmuste) võrdvõimalikkusele tuleks klassikalise tõenäosuse mõiste kordamisel (seda on õpitud juba põhikoolis) rääkida ka nõuetest, et üksikjuhud peavad olema paarikaupa välistavad ja nende koguarv n peab olema lõplik. Kui välistatuse nõue on tavaliselt õpilase jaoks loomulik, siis nõue, et n on lõplik, võib tunduda esmalt üleliigsena, kuna ta ei ole kohanud veel juhtu, kus see oleks lõputu. Kui selline probleem tekib enne geomeetrilise tõenäosuse käsitlust, võiks selgitada asja näiteks kohtumisega teatud ajavahemikus. Olgu kaks noort inimest kokku leppinud kohtuda kella 15 ja 16 vahel kaupluse juures. Arutleme, kui palju on võimalikke kohtumishetki selle tunni jooksul. Lugedes kohtumishetkeks seda hetke, kui üks märkab teist või seda hetke, kui üks

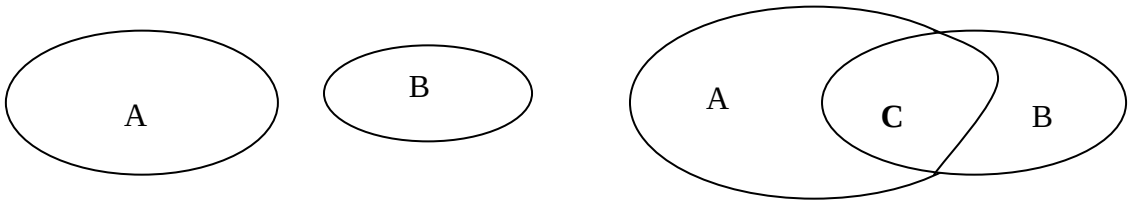
puudutab teist (näiteks tervitades kättpidi), on selge, et neid hetki, mis toimuvad praktiliselt momentselt, mahub tundi lõputult palju. Ka ajatelge (sisuliselt arvtelg) kasutades saab asi selgeks. Märgime arvteljele arvud 15 ja 16. Teatavasti on iga kahe arvu vahel reaalarve lõpmatult palju ja kuna kohtumine võib toimuda iga reaalarvulise kellaaja korral sellest vahemikust, saamegi, et võimalike kohtumiste üksikjuhtude arv on lõputult suur. Kuigi need juhud on paarikaupa välistavad ja põhimõtteliselt võrdvõimalikud, ei ole võimalik klassikalist tõenäosust leida. Nii jõutaksegi geomeetrilise tõenäosuse juurde. Analoogiliselt viib juht, kus me ei tea, kas juhusliku sündmuse üksikjuhud (elementaarsündmused) on võrdvõimalikud või mitte, statistilise tõenäosuse juurde. Klassikaliseks näiteks on siin ikka küsimus, kui suur on poeglapse või tütarlapse sündimise tõenäosus. Klassikalise tõenäosuse valemi järgi arvutada ei või (saaksime ebatäpse tõenäosuse 0,5), sest ei ole teada, kas üksikjuhud *sünnib tütarlaps* ja *sünnib poeglaps* on võrdvõimalikud. Leidnud küllalt suure katsete arvu korral (ka vaatlus on katse) vastavad statistilised tõenäosused, saame ka teada, et need juhud ei ole võrdvõimalikud. Tütarlapse sündimise tõenäosus on 0,486 ja poeglapse sündimise tõenäosus on 0,514. Nendest tõenäosustest rääkides tuleks õpilastele tutvustada ka nn rahvastikupüramiidi. Sellest selgub, et kuigi poeglapsi sünnib rohkem, tekib teatud vanuses olukord, kus naisi ja mehi on samapalju ja hiljem on koguni naisi rohkem. Mis võiks sellist olukorda põhjustada ja kuidas sellisesse olukorda suhtuda? Milliste eelduste korral võiks kogu rahvastiku püramiidi ulatuses olla mehi rohkem kui naisi?

Vaatamata klassikalise, geomeetrilise ja statistilise tõenäosuse erinevale arvutusviisile, on kõik need tõenäosused kasutamise seisukohalt võrdväärsed ning nende kohta kehtivad samad teoreemid ja valemid. Sündmuse tõenäosuse olemuse paremaks mõistmiseks tuleks pöörata õpilaste tähelepanu sellele, et ühelt poolt näitab tõenäosus kindluse astet, millega võib oodata vaadeldava sündmuse toimumist järgmisel korral (näiteks tõenäosuse 0,89 korral on küllalt kindel, et see sündmus toimub), kuid teiselt poolt näitab tõenäosus (0,89), kui suurel osal/protsendil katsetest on keskmiselt oodata vaadeldava sündmuse toimumist. Mingi sündmuse suur või väga väike tõenäosus ei garanteeri siiski selle sündmuse toimumist või vastavalt mittetoimumist. Need tõenäosused näitavad, milline on sündmuse toimumise (mittetoimumise) keskmine sagedus suure hulga juhtude (katsete) seas. Tähendab väga väikese tõenäosusega juhuslik sündmus võib toimuda ka mitu korda järjest, kuid edaspidi tuleb üks või mitu perioodi, kus vaadeldav sündmus toimub oluliselt harvemini, kui lubab vastav tõenäosus või ei toimu pikka aega üldse (ka „anomaalia“ tõenäosuse seisukohalt). Öeldu selgitab ka tõenäosusega seotud anekdootliku vestluse, mis toimus haige ja arsti vahel,

ebaloogilisust. Vestlus oli järgmine. *Haige: „Kulla doktor, kas see operatsioon on ka ohtlik?“ Arst: „On küll, igast kümnest opereeritavast sureb üheksa. Aga olge mureta, teie ei sure, sest mul on juba järjest üheksa opereeritavat surnud.“*

Sündmuste algebra küsimuste käsitlemisel ei ole kummaski ainekavas märgitud sündmuste geomeetrilist kujutamist. Seda tuleks aga käsitleda, sest nii muutub arusaamine sündmuste omavahelistest seosest ja tehetest nendega, kuid ka sündmuste summa ja korrutise tõenäosuse arvutamise valemitest ja nende põhjendustest lihtsamaks ja kiiremaks. Sündmuste geomeetrilist kujutamist peaks õpetaja vaatlema kui abivahendit ülejäänu paremaks mõistmiseks.

Kitsa kursuse korral on otstarbekas anda sündmuste summa tõenäosuse arvutamise valemid välistavate sündmuste ja mittevälistavate sündmuste (ametlikus õppekavas seda ei ole) korral valmis kujul kätte, kuid nende õigsust tuleks siiski selgitada (mitte tõestada), tuginedes vastavatele joonistele. See aitab valemeid paremini mõista, meelde jätta ja isegi kasutada. Välistavate sündmuste *A* ja *B* korral (vasakpoolne joonis) on sündmuste summa tõenäosuse valem kujul $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Selle valemi kehtivuse selgitus võiks olla järgmist laadi.



Sündmuse $A + B$ korral liituvad sündmuste *A* ja *B* soodsad juhud (piirkondade *A* ja *B* pindalad), seega liituvad P($A + B$) leidmisel ka vastavad tõenäosused $P(A)$ ja $P(B)$. Mittevälistavate sündmuste juhu käsitlemist, nagu öeldud, ei näe ainekava ette, kuigi vastava valemi $P(A + B) = P(A) + \ + P(B) – P(AB)$ õigsust on lihtne parempoolse joonise abil selgitada. Näitame seda igaks juhuks. Sündmusi *A* ja *B* kujutavad kaks ovaalset kujundit *A* ja *B*. Nende ühine osa *C* kujutab sündmuste *A* ja *B* korrutist, st $C = AB$. Sündmust $A + B$ kujutab ala, mida piiravad ovaalide piirjoonte välised osad. Nüüd aga $P(A + B) \neq P(A) + \ + P(B)$, sest võrduse paremas pooles on tõenäosus $P(C)$ võetud kaks korda: kord sündmuse *A* kaudu, kord sündmuse *B* kaudu. Et tulemus saaks õige, tulebki paremast poolest lahutada $P(C) = P(AB)$. Kitsa kursuse korral ei tule käsitleda ka sõltuvate sündmuste mõistet ning

sõltuvate sündmuste korrutise tõenäosust. Küll tuleb seda käsitleda aga sõltumatute sündmuste korral.

Laia kursuse korral on loomulik, et valemid $P(A + B) = P(A) + P(B)$, $P(A + B) = P(A) + + P(B) - P(AB)$, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ *ja* $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$ tuletatakse. Vastavad tõestused on reeglina õpikutes olemas.

Üldplaanis, eristamata kitsast ja laia kursust, on matemaatika ainekava koostajad ilmselt eeldanud, et järgnevalt käsitletakse juhuslikku suurust, selle jaotusi (tõenäosusfunktsiooni) ja arvkarakteristikuid (keskväärtus, dispersioon jt). Seejärel tuleks kirjeldava statistika küsimused, mis on osaliselt põhikoolis õpitu kordamine, ning lineaarne korrelatsioon. Aine sellisel järjestusel on mõned olulised puudused. Varemõpitu põhikoolist ei saa selget edasiarendust juhusliku suuruse ja vastava jaotuse (tõenäosusfunktsiooni) näol. On ju põhikoolist teada, et tabel, kus on tunnuse väärtused ja vastavad suhtelised sagedused, esitab jaotuse. Seejuures on kõnealuses peatükis tõenäosuse mõiste kujundatud ju suhtelise sageduse mõiste kaudu. Nüüd jääb aga kasutamata võimalus suhtelise sageduse järgi jaotuselt üle minna tõenäosuse järgi jaotusele. Arvkarakteristikud jaotuste korral (keskväärtus, standardhälve ja teised) tulevad sisse kui uued asjad, sest aritmeetilise keskmise jne kordamine ning täpsustamine toimub kursuse lõpus. Öeldu põhjal soovitaks pärast tõenäosuse mõistet ja vastavaid teoreeme käsitleda varemõpitud statistika-alaseid küsimusi, laiendades seda valdkonda korrelatsioonini, seejärel jõuda, lähtudes samuti varem õpitud jaotustabelitest, statistilise suuruse ja selle jaotuseni, nüüd jaotus juba tõenäosuste järgi (näiteks binoomjaotus) ning põhikoolis õpitud arvkarakteristikute üldistamine tõenäosusfunktsiooni juhule.

Käsitledes kirjeldava statistika küsimust, tuleks varasemast rohkem tähelepanu pöörata üldkogumile ja valimile, sest uue teemana on ainekavas statistilise otsustuse usaldatavus keskväärtuse usaldusvahemiku näitel. Aritmeetilise keskmise käsitlemisel on oht, et seda hakatakse kõikjal kasutama, kus on juttu keskmisest. Õpilaste veenmiseks, et aritmeetilise keskmise kasutamine on mõnel juhul vale, tuleks tuua mõni näide. Juba klassikaliseks on kujunenud näide kaks korda sama tee (teepikkuse konstantsus!) läbimisest erinevate püsikiirustega. *Auto sõitis Tartust Elvasse ühtlase kiirusega* v_1 *km/h ja Elvast Tartusse ühtlase kiirusega* v_2 *km/h. Leidke keskmine kiirus edasi-tagasi sõidul.* Lahendusest. Olgu

linnade vahemaa a km, siis $t_1 = \frac{a}{v_1}$ ja $t_2 = \frac{a}{v_2}$ ning keskmine kiirus $v = \frac{2a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}}$, millest $v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$. See ei ole aga aritmeetiline keskmine, vaid harmooniline keskmine. Muuseas, harmoonilise keskmise pöördväärtus defineeritakse kui andmete pöördväärtuste aritmeetiline keskmine. Esitades eelmise ülesande arvudes, võttes kiirused 40 km/h ja 60 km/h, tuleb klassis kärmesti vastus, et keskmine kiirus on 50 km/h. Nagu tulemusest üldkujul selgub, on õige vastus 48 km/h. Asja saab õpetuslik-kasvatuslikus plaanis veelgi edasi arendada. Kui sõita t tundi (konstantne aeg!) kiirusega v_1 km/h ja seejärel sama kaua kiirusega v_2 km/h, tuleb keskmiseks kiiruseks antud kiiruste aritmeetiline keskmine. Siit omakorda praktiline järeldus: kui kavatsetakse jõuda teatud ajaks sihtpunkti ja leitakse, et selleks piisab kiirusest 80 km/h, aga ühel teelõigul (10 km) tuleb sõita kiirusega 60 km/h, siis kaotatud aja tagasitegemiseks ei tule mitte sõita järgmised 10 km kiirusega 80 + 20 = 100 km/h (keskmine kiirus tuleks vaid 75 km/h), vaid sama kaua, kui sõideti kümmet kilomeetrit ($\frac{1}{6}$ h = 10 minutit) kiirusega 100 km/h. Keskmisi ja nende huvitavaid rakendusi on veelgi ja soovi korral võib õpilastel lasta teha vastavad ettekanded.

Statistilise kogumi arvtunnuste kõrval peaks koolis rääkima samuti mittearvulistest (ka nimetus kvalitatiivne) tunnustest. Vastupidisel juhul saab õpilane vildaka ettekujutuse statistilisest kogumist ja selle uurimisest. Tekib ettekujutus, et alati, kui tunnuse väärtusteks on arvud, võib leida kõiki arvkarakteristikuid ja teha nende põhjal järeldusi kogumi kohta. Paraku see nii ei ole, isegi mitte järjestatud tunnuse korral, kus arvud on sisuliselt tunnuse väärtuste, näiteks väga ilus, ilus, keskpärane jne, koodideks. Järjestatud tunnuse korral on mõningatel juhtudel lubatud kasutada aritmeetilist keskmist, dispersiooni ja standardhälvet, kuid üldjuhul seda ei soovitata. Keskmisena kasutatakse siis mediaani ja hajuvusnäitajatena kvartiile. Siit järeldubki, et koolis õpilasele koondhinnet pannes (hinne on kvalitatiivse tunnuse *teadmiste tase* kood) tuleks kasutada mediaani või vähemalt arvestada seda, kui õpetaja on kahevahel, kumba hinnet panna. Et õpilaste, klasside jne paremusjärjestuste koostamine käib ikka hinnete aritmeetilise keskmise järgi, on ühelt poolt traditsioon ja samas paratamatus, sest minnes üle mediaanile, ei oleks uued tulemused ja järjestused enam endistega võrreldavad. Ja lisaks ei keela matemaatiline statistika aritmeetilise keskmise kasutamist, vaid ei soovita seda kasutada. Nominaaltunnuse korral on ainsana lubatavaks

näitajaks tunnuse väärtuste mood. Loomulikult võib sellele lisada ka kaalu, mis näitab, paljud nii arvasid (näiteks hinnangu andmisel millegi või kellegi kohta). Jutt on siin juhusliku suuruse jaotuse koondnäitajaist. Jaotus ise on muidugi kõige täiuslikum mudel nähtusest mingi tunnuse seisukohalt, kuid tülikas võrdluseks teiste samalaadsete nähtustega

Standardhälbe käsitlemisel küsivad õpilased sageli, millisest väärtusest alates võib lugeda tunnuse väärtuste (juhusliku suuruse väärtuste) hajuvust suureks või vastavalt väikseks. Selliseid piire ei saa olla juba seetõttu, et standardhäbe suurus sõltub ka sellest, kui suured on tunnuse väärtused. Küll on aga standardhälvete võrdlemine omal kohal erinevate samaliigiliste kogumite korral. Kui kogumid või tunnused on oma olemuselt erinevad, kasutatakse nende hajuvuse võrdlemisel variatsioonikordajat $\frac{\sigma}{\overline{x}}$. Nii on näiteks mingi inimkollektiivi hajumise võrdlemisel kehakaalu ja pikkuse seisukohalt. Standardhälve leiab kasutamist ka mitmetes valemites ning näiteks mingi jaotuse hindamisel, kas on tegemist normaaljaotusega või mitte (niinimetatud 3σ-reegel). Standardhälbe kasutamisest oli juttu ka õpipädevuse juures.

Lineaarse korrelatsiooni käsitlemisest koolis oli juttu seoses sotsiaalse pädevusega ja teemaga kodanikualgatusest ja ettevõtlikkusest.

Kui matemaatilise statistika osa on käsitletud, on otstarbekas teha kitsa kursuse korral suurem andmetöötlusealane projekt, alates andmete kogumisest/hankimisest, korrastamisest ja esitamisest kuni töötlemiseni (arvkarakteristikud) ja järelduste tegemiseni uuritava nähtuse kohta. Olenevalt sellest, millisest elu- või teadusvaldkonnast pärinevad andmed, võiks projekti kaasata ka mõne teise õppeaine. Matemaatika laia kursuse korral võiks samasuguses uurimisprojektis vaadelda kaht tunnust ning haarata kaasa ka korrelatsioon. Teatud teemade korral, näiteks pärilikkus (koostöö bioloogia õpetajaga), läheb tarvis tõenäosusega seotud matemaatilist aparatuuri nagu jaotused ja vastavad arvkarakteristikud. On loomulik, et sellised projektid realiseeritakse arvuti abil. Andmete töötlemist saab teha ka taskuarvutitel (näiteks Texas Instruments T I – 80 või T I – 83), millel on vastavad programmid, võimalus graafikuid joonestada ning kõike seda lauaarvuti vahendusel välja trükkida.