Stereomeetria õpetamisest gümnaasiumis

Andres Haavasalu, C. R. Jakobsoni nimeline gümnaasium

Matemaatika ainevaldkonda kuuluvad **kitsas matemaatika** ja **lai matemaatika**. Laias matemaatikas käsitletakse mõisteid ja meetodeid, mida on vaja matemaatikateaduse olemusest arusaamiseks. Kitsa matemaatika põhiülesandeks on matemaatika rakenduste kasutamine ümbritseva maailma kirjeldamiseks ning elus toimetuleku tagamiseks.

Stereomeetria (ruumigeomeetria) on geomeetria osa, mis uurib kujundeid ruumis. Laias matemaatikas õpitakse stereomeetriat kaks kursust. XII kursuses (Geomeetria I) õpitakse stereomeetria asendilauseid, ristkoordinaate ja vektorit ruumis ning sirge ja tasandi võrrandeid ruumis, XIII kursuses (Geomeetria II) õpitakse hulktahukaid ja pöördkehasid ning nende lõikeid tasandiga. Kitsas matemaatikas piirdutakse ühe kursusega (VIII kursus „Stereomeetria“). Õpitakse ristkoordinaate ruumis, stereomeetria asendilauseid, hulktahukaid ja pöördkehasid ning nende lõikeid tasandiga. Kitsas matemaatikas ei õpita vektorit ruumis ning sirge ja tasandi võrrandeid ruumis. Kõik kitsas matemaatikas õpitav stereomeetria sisaldub ka laias matemaatikas.

1. Stereomeetria asendilaused

Planimeetria ja stereomeetria õpetamisega pannakse alus tehnilisele kirjaoskusele (joonise lugemine jms). Stereomeetria õppimisel on oluline saada ettekujutus kujundite vastastikusest asendist. Peab oskama määrata kahe sirge, sirge ja tasandi ning kahe tasandi vastastikust asendit. Tuleb selgeks õppida punkti, lõigu ja sirge ristprojektsiooni leidmine tasandil. On vaja osata arvutada nurka kahe sirge, sirge ja tasandi ja kahe tasandi vahel. Stereomeetria asendilausete tundmine on abiks stereomeetriaülesannete lahendamisel nii koolis kui ka igapäevaelus. Laias matemaatikas tuleks teoreemid tõestada ja valemid tuletada ning kinnistada õpitut suure hulga ülesannete lahendamisega. Kitsas matemaatikas võiks keskenduda rohkem näitlikustamisele ja praktilise sisuga ülesannete lahendamisele ning väidete põhjendamisel toetuda intuitsioonile ja analoogiale. Järgnevate teemade juures on märgitud, mida õpitakse ainult laias matemaatikas, mida aga nii kitsas kui ka laias.

1.1. Kahe sirge vastastikused asendid ruumis (kitsas ja lai)

Kahe sirge vastastikused asendid tasandil on varem õpitud. Kahel sirgel ruumis võib olla neli erinevat vastastikust asendit:

a) *sirged s ja t on paralleelsed* $s \parallel t$;

b) *sirged s ja t ühtivad* $s = t$;

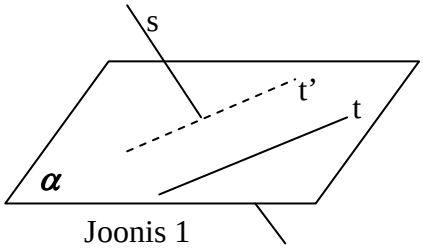
c) *sirged s ja t lõikuvad punktis A* $s \cap t = \{A\}$,

ristumine on lõikumise erijuht $s \perp t$;

d) *sirged s ja t on kiivsirged* $s \div t$.

Ühtivate sirgete puhul on sisuliselt tegemist ühe ja sama sirgega. Läbi kahe paralleelse sirge või läbi kahe lõikuva sirge saab panna vaid ühe tasandi.

Definitsioon. **Kaks sirget on kiivsirged, kui neist ei saa läbi panna tasandit.**



Joonis 1

Võib ka öelda, et *kaks sirget on kiivsirged, kui need ei lõiku ega ole paralleelsed*. Joonisel 1 on *s* ja *t* kiivsirged.

1.2. Nurk kahe sirge vahel (kitsas ja lai)

Nurk kahe sirge vahel tasandil on varem õpitud.

Definitsioon. **Kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka ühe antud sirge ja sellise temaga lõikuva sirge vahel, mis on paralleelne teisega antud sirgetest.**

Joonisel 1 on kiivsirgete *s* ja *t* vaheline nurk võrdne sirgete *s* ja *t'* vahelise nurgaga.

1.3. Sirge ja tasandi vastastikused asendid (kitsas ja lai)

Sirgel ja tasandil võib olla kolm erinevat vastastikust asendit:

a) *sirge s on paralleelne tasandiga α* $s \parallel \alpha$;

b) *sirge s asub tasandil α* $s \subset \alpha$;

c) *sirge s lõikab tasandit α punktis A* $s \cap \alpha = \{A\}$;

ristumine on lõikumise erijuht $s \perp \alpha$.

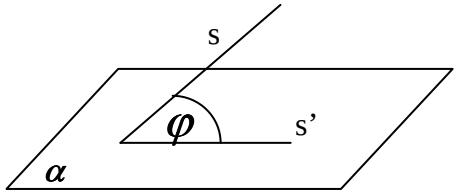
*Tasandiga ristuvat sirget nimetatakse tasandi **normaaliks**. Sirget, mis pole risti tasandiga, kuid lõikab tasandit, nimetatakse tasandi **kaldsirgeks**.*

1.4. Nurk sirge ja tasandi vahel (kitsas ja lai)

Nurga määramine sirge ja tasandi vahel on oluline. Kui ülesande lahendamisel see nurk valesti määratakse, siis on tegemist hoopis teise ülesandega. Näiteks kuubi diagonaali ja kuubi tahu vaheliseks nurgaks võib ekslikult pakkuda kuubi diagonaali ja kuubi serva vahelist

nurka. Enne ülesande lahendama asumist tuleb ülesanne hoolikalt läbi lugeda, vastav joonis teha ning andmed välja kirjutada.

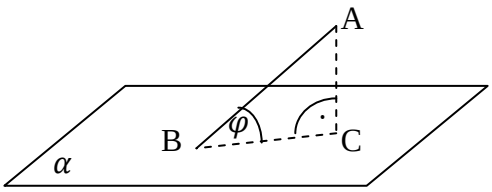
Definitsioon. **Nurgaks kaldsirge ja tasandi vahel nimetatakse teravnurka selle sirge ja vaadeldaval tasandil asuva sirge ristprojektsiooni vahel.**



Joonis 2

Joonisel 2 on nurk φ sirge *s* ja tasandi α vaheline nurk, *s'* on sirge *s* ristprojektsioon tasandil α. Kui sirge on paralleelne tasandiga või asub tasandil, siis on sirge ja tasandi vahelise nurga suurus 0°. Tasandi normaali ja tasandi vahelise nurga suurus on 90° .

Ülesanne (kitsas matemaatika).
Väljaspool tasandit asuvast punktist on tasandini tõmmatud 16 cm pikkune kaldlõik, mis moodustab tasandiga 30° *nurga. Leidke selle lõigu ristprojektsiooni pikkus tasandil.*



Joonis 3

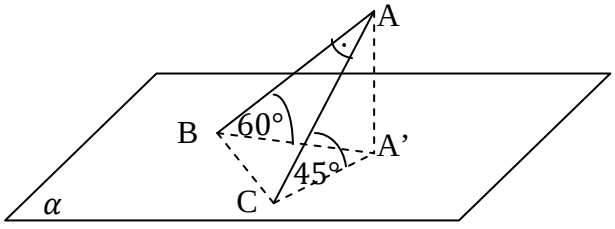
Antud. $AB = 16\,cm$, $\varphi = 30°$.

Leida BC.

Lahendus. Punkti *A* ristprojektsiooniks tasandil on punkt *C.* Ühendades saadud kolm punkti omavahel, saame täisnurkse kolmnurga ACB, millest $cos\varphi = \frac{BC}{AB} \implies cos30° = \frac{BC}{16} \implies$ $BC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ (cm)$.

Vastus. $BC = 8\sqrt{3}\ cm$.

Ülesanne (lai matemaatika).
Tasandist 18 cm kaugusel asuvast punktist on tõmmatud tasandini kaks omavahel ristuvat lõiku. Üks lõik moodustab tasandiga 45° *nurga, teine lõik* 60° *nurga. Leidke nende lõikude tasandil asuvate otspunktide vaheline kaugus (joonis 4).*



Joonis 4

Antud. $AA' = 18\,cm,\ AB \perp AC,\ \angle ACA' = 45°,$ $\angle ABA' = 60°$.

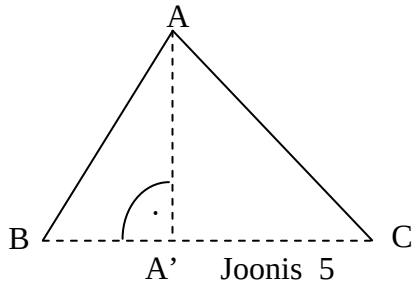
Leida BC.

Lahendus. Täisnurkses kolmnurgas AA'C: $sin45° = \frac{AA'}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{18}{0{,}5\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}$ (cm).

Täisnurkses kolmnurgas AA'B: $sin60° = \frac{AA'}{AB} \Longrightarrow AB = \frac{18}{0{,}5\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$ (cm).

Täisnurkses kolmnurgas BAC: $BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2} = \sqrt{1080} = 6\sqrt{30}$ (cm).

Vastus. $BC = 6\sqrt{30}\ cm$.



Joonis 5

NB! Eelmise ülesande lahendamisel saab teha joonise, kus punktid A, B, C ja A' asuvad ühel tasandil (joonis 5). Antud andmete põhjal pole see aga võimalik, sest kolmnurga sisenurkade summa peab olema $180°$. Seega joonise 5 põhjal ei saa seda ülesannet lahendada.

1.5. Kahe tasandi vastastikused asendid (kitsas ja lai)

Kahel tasandil võib olla kolm erinevat vastastikust asendit:

a) *tasandid α ja β on paralleelsed* $\alpha \parallel \beta$;

b) *tasandid α ja β ühtivad* $\alpha = \beta$;

c) *tasandid α ja β lõikuvad mööda sirget s* $\alpha \cap \beta = \{s\}$;

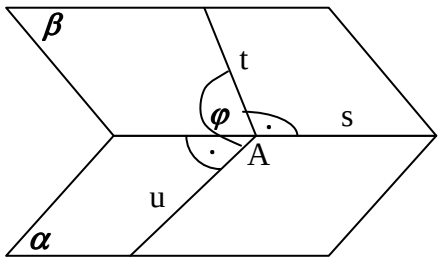
ristumine on lõikumise erijuht $\alpha \perp \beta$.

Ühtivate tasandite puhul on sisuliselt tegemist ühe ja sama tasandiga.

1.6. Nurk kahe tasandi vahel (kitsas ja lai)

Kaks lõikuvat tasandit moodustavad neli ühest sirgest väljuvat pooltasandit.

Definitsioon. **Kahetahuliseks nurgaks nimetatakse kujundit, mille moodustavad kaks ühest sirgest väljuvat pooltasandit**.



Joonis 6

Sirge *s* on kahetahulise nurga serv (joonis 6), pooltasandid α ja β on kahetahulise nurga tahud. Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse joonnurga abil.

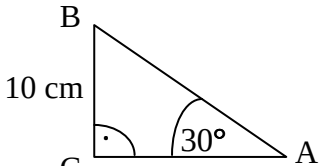
Definitsioon. **Joonnurk on nurk, mille tipp asub kahetahulise nurga serval ja nurga haarad tahkudel on risti kahetahulise nurga servaga.**

Joonnurga tipp *A* asub kahetahulise nurga serval, joonnurga üks haar *u* asub ühel tahul, teine haar *t* teisel tahul. Joonnurga haarad *u* ja *t* on risti kahetahulise nurga servaga *s*. Joonnurga tasand on risti kahetahulise nurga servaga. Joonnurga suurus φ on ühtlasi antud kahetahulise nurga suuruseks. Joonnurga suurus ei sõltu joonnurga tipu asukohast serval. Kahe tasandi lõikumisel tekib neli kahetahulist nurka.

Definitsioon. **Kahe lõikuva tasandi vaheliseks nurgaks nimetatakse nende tasandite lõikumisel tekkiva kahetahulise nurga joonnurka.**

Kui kaks tasandit on paralleelsed või ühtivad, siis on nende tasandite vahelise nurga suurus 0°, ristuvate tasandite vahelise nurga suurus on 90°. Kahe tasandi vaheline nurk on võrdne ka nende tasandite normaalide vahel oleva nurgaga. Joonnurga rakendamist võiks alustada lihtsa ülesandega.

Ülesanne (kitsas ja lai).
Kahetahulise nurga ühel tahul on antud punkt, mis asub 10 cm kaugusel teisest tahust. Kui kaugel asub see punkt kahetahulise nurga servast, kui kahetahulise nurga suurus on 30° *?*



Joonis 7

Lahendus. Toetudes joonisele 6, võime antud punkti *B* võtta tahul β. Sel juhul on punkti *B* ristprojektsiooniks tahul α punkt *C* ning punkt *A* asub kahetahulise nurga serval. Ülesande lahendamine taandub täisnurkse kolmnurga lahendamisele (joonis 7). Otsitava lõigu *BA* pikkuse leiame seosest $\sin 30° = \frac{BC}{BA} \Rightarrow$

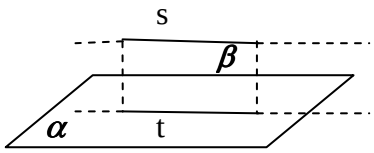
$$BA = \frac{BC}{sin30°} = \frac{10}{0{,}5} = 20(cm).$$

Vastus. Antud punkt asub 20 cm kaugusel kahetahulise nurga servast.

Tuleb arvestada, et punkti kaugus tasandist on lühima lõigu (ehk ristlõigu) pikkus antud punktist antud tasandini ning punkti kaugus sirgest on samuti ristlõigu pikkus antud punktist antud sirgeni. Eelmise ülesande lahendamisel eksitakse sageli täisnurga asukoha määramisel.

1.7. Sirge ja tasandi paralleelsus (lai)

Definitsioon. **Sirget ja tasandit nimetatakse paralleelseteks, kui neil pole ühtki ühist punkti** (kitsas ja lai)**.**



Joonis 8

Sirge ja tasandi paralleelsuse tunnust väljendab teoreem (lai):

kui tasandil mitteasetsev sirge on paralleelne tasandil asetseva mingi sirgega, siis on ta paralleelne ka selle tasandiga.

Selle teoreemi võib tõestada vastuväiteliselt.

Eeldus. $s \not\subset \alpha$, $t \subset \alpha$, $s \parallel t$ (joonis 8).

Väide. $s \parallel \alpha$.

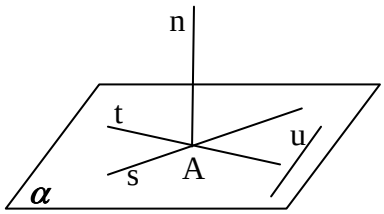
Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et sirge *s* ei ole paralleelne tasandiga α Sel juhul sirge *s* peab lõikuma tasandiga α. Paralleelsed sirged *s* ja *t* asuvad tasandil β. Tasandid α ja β lõikuvad mööda sirget *t*. Kui sirge *s* lõikub tasandiga α, siis peab lõikepunkt asuma nii tasandil α kui ka tasandil β ehk tasandite lõikesirgel *t* . Seega sirgetel *s* ja *t* on üks ühine

punkt ja sirged lõikuvad. See on aga vastuolus eeldusega. Järelikult on vastuväiteline oletus väär ning $s \parallel \alpha$. m. o. t. t.

1.8. Sirge ja tasandi ristseis (kitsas ja lai)

Definitsioon. **Sirget ja tasandit nimetatakse ristuvateks, kui sirge on risti selle tasandi iga sirgega.**

Sirge ja tasandi ristseisu tunnust väljendab **teoreem** (kitsas tõestuseta):
kui sirge on risti tasandi kahe lõikuva sirgega, siis on ta risti ka selle tasandiga.
Eeldus. $s \subset \alpha,\ t \subset \alpha, s \cap t = \{A\}$, $n \perp s$, $n \perp t$ (joonis 9) .
Väide. $n \perp \alpha$.



Joonis 9

Tõestus. Võtame kasutusele sirgete *s*, *t* ja *n* sihivektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\vec{n}$. Et $\vec{s} \nparallel \vec{t}$, siis võime need võtta tasandi α rihivektoriteks. Olgu sirge u tasandi α suvaline sirge ning selle sihivektor $\vec{u}$. Selle vektori saab avaldada rihivektorite kaudu $\vec{u} = p\vec{s} + q\vec{t}$, kus p ja q on reaalarvud. Leiame vektorite $\vec{n}$ ja $\vec{u}$ skalaarkorrutise.

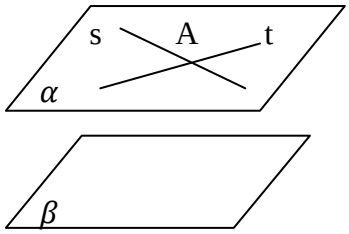
$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot (p \cdot \vec{s} + q \cdot \vec{t}) = p \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} + q \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}$. Kuna $\vec{n} \perp \vec{s}$ ja $\vec{n} \perp \vec{t}$, siis on nende vektorite skalaarkorrutis võrdne nulliga. Seega ka $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ning $\vec{n} \perp \vec{u}$. Sellest järeldub, et ka sirge *n* on risti sirgega *u*. Et sirge *n* on risti tasandi α suvalise sirgega, siis on ta risti ka tasandiga.
m. o. t. t.

1.9. Kahe tasandi paralleelsus (lai)

Definitsioon. **Kaht tasandit nimetatakse paralleelseteks, kui neil ei ole ühtki ühist punkti** (kitsas ja lai)**.**
Kahe tasandi paralleelsuse tunnust väljendab teoreem:

kui ühe tasandi kaks lõikuvat sirget on paralleelsed teise tasandiga, siis need tasandid on paralleelsed.

Eeldus. $s \subset \alpha,\ t \subset \alpha, s \cap t = \{A\}$, $s \parallel \beta$, $t \parallel \beta$ (joonis 10).
Väide. $\alpha \parallel \beta$.

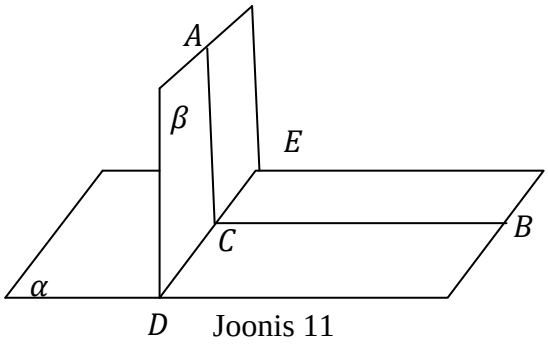


Joonis 10

Tõestus. Erinevad tasandid on paralleelsed või lõikuvad. Kui α ja β lõikuvad, siis vähemalt üks sirgetest *s* või *t* lõikab nende tasandite lõikesirget ning lõikab ühtlasi tasandit β. See on aga vastuolus eeldusega. Järelikult need tasandid ei saa lõikuda. Seega $\alpha \parallel \beta$. m. o. t. t.

1.10. Kahe tasandi ristseis (lai)

Definitsioon. **Kaht tasandit nimetatakse ristuvateks, kui nad lõikudes moodustavad kahetahulise täisnurga** (kitsas ja lai)**.**



Joonis 11

Kahe tasandi ristseisu tunnust väljendab teoreem:

kui ühe tasandi normaal asub teisel tasandil, siis need tasandid on risti.

Eeldus. $AC \perp \alpha$, $AC \subset \beta$ (joonis 11).

Väide. $\beta \perp \alpha$.

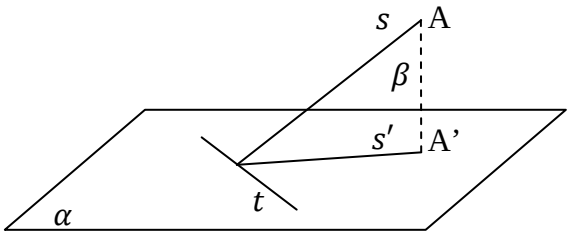
Tõestus. DE on tasandite α ja β lõikesirge. Joonestame tasandil α sirge *BC* risti sirgega *DE*. Et $AC \perp \alpha$, siis$AC \perp DE$ ning $\angle ACB$ on kahetahulise nurga joonnurk. See joonnurk on täisnurk, sest $AC \perp BC$. Seega tasandite α ja β vahelise nurga suurus on $90°$. Järelikult $\beta \perp \alpha$. m. o. t. t.

1.11. Kolme ristsirge teoreem (lai)

Tasandi kaldsirge on risti tasandil oleva sirgega parajasti siis, kui kaldsirge ristprojektsioon tasandil on risti selle sirgega.

Teoreemi sõnastuses on ühendatud nii teoreem kui ka selle pöördteoreem väljendi „parajasti siis“ (ehk siis ja ainult siis) abil.

Sirge *s* on tasandi α kaldsirge, *s'* on sirge *s* ristprojektsioon tasandil, A on sirgel s võetud punkt, *A'* on punkti *A* ristprojektsioon tasandil ning *t* on tasandil asuv sirge (joonis 12). Järgnevalt on tõestatud üks nendest teoreemidest.



Joonis 12

a) Eeldus. $s \perp t$.

Väide. $s' \perp t$.

Tõestus. Kuna sirged s ja *AA'* lõikuvad , siis määravad nad mingi tasandi β. Et *A'* on punkti *A* ristprojektsioon tasandil, siis $AA' \perp \alpha$. Järelikult on AA' risti tasandi α iga sirgega ning $AA' \perp t$. Nüüd on tasandi β kaks lõikuvat sirget s ja *AA'* risti sirgega *t* . Järelikult $t \perp \beta$. Sel juhul peab *t* olema risti tasandi β iga sirgega, seega $t \perp s'$ ehk $s' \perp t$. m. o. t. t.

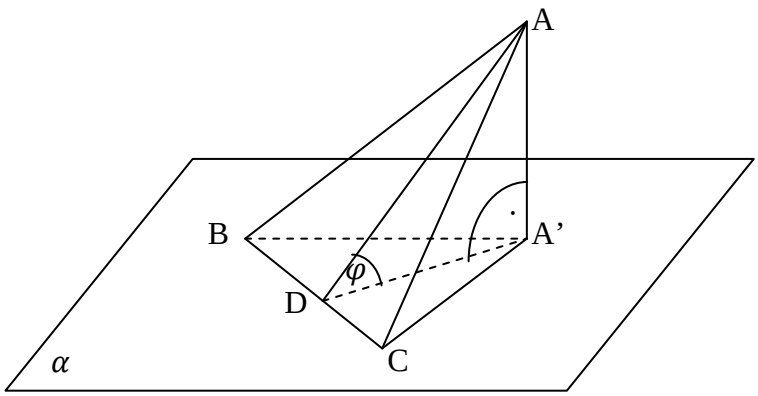
b) Pöördteoreemi puhul vahetatakse eeldus ja väide ning tõestuskäik on analoogiline.

1.12. Hulknurga ristprojektsiooni pindala (lai)

Oluline on aru saada, et hulknurga ristprojektsiooni pindala muutub, kui muuta hulknurga kaldenurka tasandi suhtes. Kui hulknurk on risti tasandiga, siis on hulknurga projektsiooniks lõik ning projektsiooni pindala on võrdne nulliga. Kui aga hulknurk on tasandiga paralleelne, siis on projektsiooni pindala võrdne hulknurga pindalaga. Hulknurga projektsiooni pindala kohta kehtib teoreem:

hulknurga projektsiooni pindala tasandil on võrdne hulknurga pindala ja hulknurga tasandi ning projektsiooni tasandi vahelise nurga koosinuse korrutisega.

Esmalt tõestatakse teoreem kolmnurga kohta juhul, kui kolmnurga üks külg asub projektsioontasandil. Saadakse valem $\boldsymbol{S_{A'BC} = S_{ABC} \cdot cos\varphi}$ (joonis 13). Seejärel näidatakse, et valem kehtib, kui kolmnurga üks külg on paralleelne projektsioontasandiga. Juhul, kui ükski külg pole projektsioontasandiga paralleelne, saab seda kolmnurka alati tükeldada kaheks kolmnurgaks nii, et kummalgi kolmnurgal on üks külg paralleelne projektsioontasandiga. Mõlema kolmnurga jaoks kehtib tuletatud valem. Sama tükeldamisvõtet kasutades saab tõestada teoreemi hulknurga ristprojektsiooni kohta.



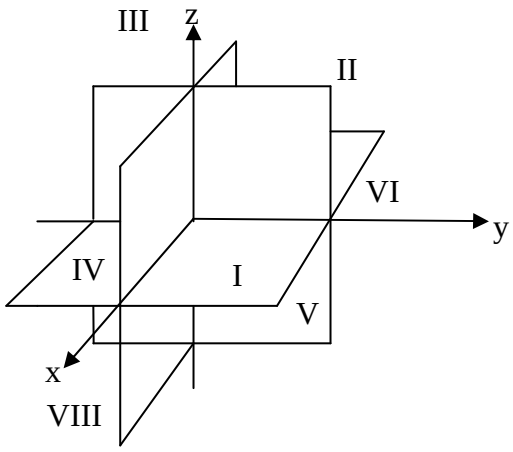
Joonis 13

$\boldsymbol{S' = S \cdot cos\varphi}$, kus S' on hulknurga ristprojektsiooni pindala.

2. Ristkoordinaadid ruumis

Varem õpitust on teada, et punkti asukoht arvsirgel on määratud ühe koordinaadiga. Koordinaattasandil on punkti asukoha määramiseks vaja kahte koordinaati. Kinosaalis, milles on vaid üks rida, piisab, kui piletile märgitakse ainult kohanumber. Kui ridu on rohkem kui üks, tuleb piletile märkida ka rea number. Kui kasutusel on veel rõdu, läheb vaja kolmandat koordinaati. Ka aega saab vaadelda ühe koordinaadina.

2.1. Punkti koordinaadid ruumis (kitsas ja lai)



Joonis 14

Punkti asukoha määramiseks ruumis võetakse kasutusele kolm ühes punktis lõikuvat paarikaupa ristuvat koordinaattelge (joonis 14). Iga kaks telge määravad koordinaattasandi. Kolm koordinaattasandit (xy, xz ja yz tasand) jaotavad ruumi kaheksaks oktandiks. Näiteks punkt $A\,(-2;-3;-4)$ asub seitsmendas oktandis. Selgeks tuleb õppida ***kahe punkti vahelise kauguse*** arvutamine. Seda läheb vaja lõigu pikkuse arvutamisel ning laias matemaatikas vektori pikkuse arvutamisel.

Ülesanne (kitsas ja lai).
Kolmnurga ABC tipud on $A(3;-1;0)$, $B(-2;5;4)$, $C(0;6;1)$. *Arvutage kolmnurga ümbermõõt.*

Lahendus. Kasutame valemit $\boldsymbol{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$ ning arvutame $AB=\sqrt{(-2-3)^2+(5+1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25+36+16}=\sqrt{77}$ p.ü. Analoogiliselt saame $AC=\sqrt{9+49+1}=\sqrt{59}$ p.ü. ja $BC=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$ p.ü.
Vastus. $P=\sqrt{77}+\sqrt{59}+\sqrt{14}$ p.ü.

2.2. Vektor ruumis (lai)

Vektor tasandil on varem õpitud ning kõik õpitud reeglid ja valemid on ruumivektori puhul kasutusel. Lisandub vaid kolmas koordinaat.

Käsitletakse järgmisi teemasid: ***punkti kohavektor, vektori koordinaadid, vektori pikkus, lineaartehted vektoritega, vektorite kollineaarsus, kahe vektori skalaarkorrutis, kahe vektori vaheline nurk.***

Uuteks teemadeks on ***vektorite komplanaarsus ja vektori avaldamine kolme mis tahes mittekomplanaarse vektori kaudu***.

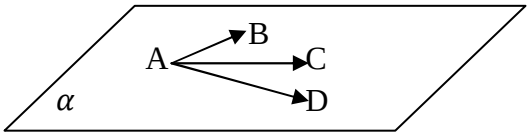
Definitsioon. **Vektoreid, mis asuvad ühel ja samal tasandil või paralleelsetel tasanditel, nimetatakse komplanaarseteks vektoriteks.**

Kaks vektorit on alati komplanaarsed. Kaks mittekollineaarset vektorit määravad rihi. Võib öelda, et *ühte rihti kuuluvaid vektoreid nimetatakse komplanaarseteks vektoriteks*. Kolme vektori komplanaarsust väljendab teoreem:

kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud kolmerealine determinant võrdub nulliga.

Vektorite abil on mõistlik lahendada paljusid planimeetria ja stereomeetria ülesandeid.

Ülesanne (lai matemaatika).
Kas punktid $A(3;0;-1)$, $B(4;2;2)$, $C(7;5;5)$ *ja* $D(10;8;8)$ *asuvad ühel tasandil?*



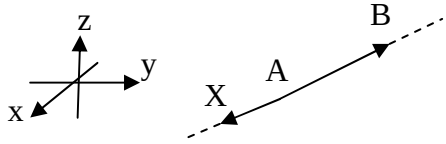
Joonis 15

Lahendus. Moodustame kolm ühest punktist lähtuvat vektorit (joonis 15), leiame nende koordinaadid ning kontrollime, kas vektorid on komplanaarsed. $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{AC} = (4;5;6)$, $\overrightarrow{AD} = (7;8;9)$. Moodustame nende vektorite koordinaatidest kolmerealise determinandi ja arvutame determinandi väärtuse.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$. Kuna determinandi väärtus on null, siis need kolm vektorid on komplanaarsed ja punktid *A, B, C* ja *D* asuvad ühel tasandil.

Vastus. Punktid *A, B, C* ja *D* on ühel tasandil.

2.3. Sirge võrrand ruumis (lai)



Joonis 16

Sirge võrrandit ruumis on hea tuletada vektorite abil.

a) Tuletame kahe punktiga määratud sirge võrrandi.

Olgu sirge määratud punktidega $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ning olgu punkt $X(x;y;z)$ selle sirge suvaline punkt (joonis 16). Leiame vektorid $\overrightarrow{AX} = (x - x_1\ ; y - y_1; z - z_1)$ ning $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Kuna $\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{AB}$, siis nende vektorite vastavad koordinaadid on võrdelised ning $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$**.** See on **kahe punktiga määratud sirge kanooniline võrrand**.

b) Vormilt samasugune on **punkti ja sihivektoriga määratud sirge kanooniline võrrand** : $\frac{x-x_1}{s_1} = \frac{y-y_1}{s_2} = \frac{z-z_1}{s_3}$**,** kus $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ on antud punkt sirgel ning $\vec{s} = (s_1;\ s_2;\ s_3)$ on sirge sihivektor.

c) Eelmise võrrandi põhjal võime kirjutada $\frac{x-x_1}{s_1} = t$, $\frac{y-y_1}{s_2} = t$ ja $\frac{z-z_1}{s_3} = t$. Avaldades *x*, *y* ja *z*, saame $\begin{cases} x = x_1 + s_1 \cdot t \\ y = y_1 + s_2 \cdot t \\ z = z_1 + s_3 \cdot t \end{cases}$. Need on sirge parameetrilised võrrandid.

2.4. Võrranditega antud sirgete vastastikuse asendi määramine (lai)

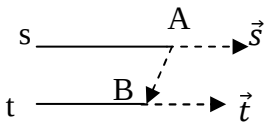
Olgu antud kaks sirget *s* ja *t* võrranditega:

s: $\frac{x-x_1}{s_1}=\frac{y-y_1}{s_2}=\frac{z-z_1}{s_3}$, kus $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ on antud punkt sirgel *s* ning $\vec{s}=(s_1;\ s_2;\ s_3)$;

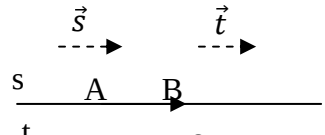
t: $\frac{x-x_2}{t_1}=\frac{y-y_2}{t_2}=\frac{z-z_2}{t_3}$, kus $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ on antud punkt sirgel *t* ning $\vec{t}=(t_1;\ t_2;\ t_3)$.

Sirgete vastastikuse asendi saab määrata vektorite $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$ abil.

1) Kui sirgete sihivektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on kollineaarsed, st $\vec{s} \parallel \vec{t}$, siis on kaks võimalust: sirged on paralleelsed või ühtivad (joonised 17 ja 18). Kahe võimaluse eristamiseks saame kasutada nii punkte *A* ja *B* kui ka vektoreid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$. Kui punktid *A* ja *B* ei kuulu korraga mõlemale sirgele, siis sirged on paralleelsed. Sel juhul ka $\overrightarrow{AB} \nparallel \vec{s}$ ja $\overrightarrow{AB} \nparallel \vec{t}$ (joonis 17). Kui aga need punktid kuuluvad mõlemale sirgele, siis sirged ühtivad. Sel juhul ka $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{s}$ ja $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{t}$ (joonis 18).



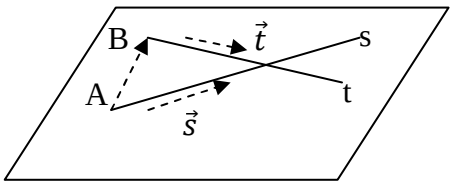
Joonis 17



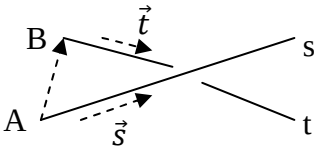
Joonis 18

2) Kui $\vec{s} \nparallel \vec{t}$, siis on jälle kaks võimalust: sirged kas lõikuvad või on kiivsirged. Kahe võimaluse eristamiseks saame kasutada vektoreid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$. Kui vektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$ on komplanaarsed, siis sirged lõikuvad (joonis 19). Sirgete ristumise korral on ka nende sirgete sihivektorid risti ning $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0$. Kui aga vektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$ on mittekomplanaarsed, siis sirged on kiivsirged (joonis 20). Kahe sirge vahelise teravnurga arvutamiseks saab kasutada valemit

$\boldsymbol{cos\varphi} = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{t}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{t}|}$.



Joonis 19



Joonis 20

2.5. Tasandi määramisviise (kitsas ja lai)

Tasand on määratud

a) kolme mitte ühel sirgel asuva punktiga;

b) sirge ja väljaspool sirget asuva punktiga;

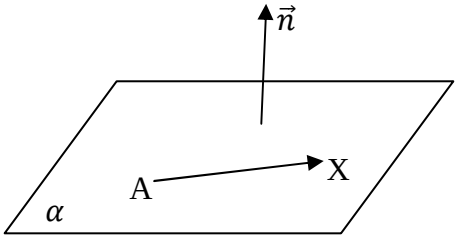
c) kahe paralleelse sirgega;

d) kahe lõikuva sirgega;

e) rihi ja punktiga;

f) normaali ja punktiga.

2.6. Tasandi võrrand (lai)



Joonis 21

Olgu tasand määratud punktiga $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja normaalvektoriga $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$ (joonis 21). Olgu tasandi suvaline punkt $X(x;\ y;\ z)$. Saame moodustada vektori $\overrightarrow{AX} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$. Kuna vektorid $\vec{n}$ ja $\overrightarrow{AX}$ on risti, siis on nende vektorite skalaarkorrutis võrdne nulliga.

Saame $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) \Longrightarrow$

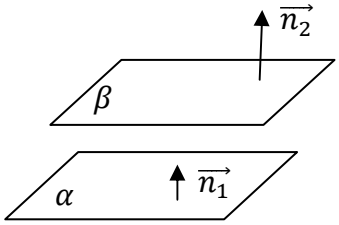
$\Longrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1)$. Asendades sulgavaldise väärtuse tähega *d* , saame **tasandi võrrandi kujul $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$.** Selles võrrandis kordajad *a*, *b* ja *c* on tasandi normaalvektori koordinaadid, *d* on vabaliige ning muutujad *x*, *y* ja *z* on tasandi suvalise punkti koordinaadid.

2.7. Võrranditega antud tasandite vastastikuse asendi määramine (lai)

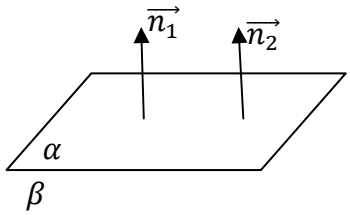
Olgu antud kaks tasandit võrranditega:

$\alpha:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ja $\beta:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Nendest võrranditest loeme välja kummagi tasandi normaalvektori koordinaadid:

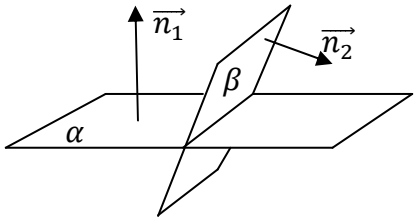
$\overrightarrow{n_1} = (a_1;\ b_1;\ c_1)$ ja $\overrightarrow{n_2} = (a_2;\ b_2;\ c_2)$.



Joonis 22



Joonis 23



Joonis 24

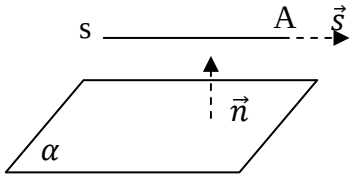
1) Kui $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, siis on tasandid kas paralleelsed või ühtivad (joonised 22 ja 23). Nende võimaluste eristamiseks saame võtta ühel tasandil mingi punkti ja kontrollida, kas see punkt asub ka teisel tasandil. Kui ei asu, siis on kaks tasandit paralleelsed, kui asub, siis need tasandid ühtivad.

2) Kui $\overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2}$, siis tasandid lõikuvad (joonis 24). Tasandite ristumise korral on ka $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ ning nende vektorite skalaarkorrutis on võrdne nulliga. Et tasandite vaheline nurk on võrdne nende tasandite normaalvektorite vahelise nurgaga, siis saab tasandite vahelise teravnurga arvutamiseks kasutada valemit $\boldsymbol{cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}}$.

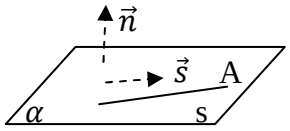
2.8. Võrranditega antud sirge ja tasandi vastastikuse asendi määramine (lai)

Olgu sirge *s* võrrand $\frac{x-x_1}{s_1} = \frac{y-y_1}{s_2} = \frac{z-z_1}{s_3}$ ja tasandi α võrrand $ax + by + cz + d = 0$.

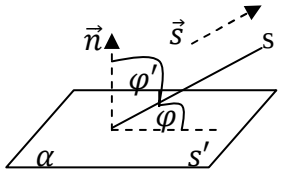
Sirge võrrandist loeme välja sirge sihivektori $\vec{s} = (s_1;\ s_2;\ s_3)$ ning sirgel asuva punkti $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, tasandi võrrandist aga tasandi normaalvektori $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$.



Joonis 25



Joonis 26



Joonis 27

1) Kui $\vec{s} \perp \vec{n}$, siis on kaks võimalust: $s \parallel \alpha$ või $s \subset \alpha$. Nende eristamiseks saame kasutada sirgel asuva punkti A koordinaate.

Kui $A \notin \alpha$, siis $s \parallel \alpha$ (joonis 25), kui $A \in \alpha$, siis $s \subset \alpha$ (joonis 26).

2) Kui sirge sihivektor $\vec{s}$ pole risti tasandi normaalvektoriga $\vec{n}$, siis sirge lõikab tasandit (joonis 27). Kui $\vec{s} \parallel \vec{n}$, siis $s \perp \alpha$.

Sirge ja tasandi vahelise nurga φ leidmiseks võib esmalt leida teravnurga φ' selle sirge ja tasandi normaalvektori vahel valemist $\boldsymbol{cos\varphi' = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}}$ (joonis 27). Seejärel $\boldsymbol{\varphi = 90° - \varphi'}$.

2.9. Võrranditega antud sirge ja tasandi lõikepunkti leidmine (lai)

Olgu sirge *s* võrrand $\frac{x-x_1}{s_1} = \frac{y-y_1}{s_2} = \frac{z-z_1}{s_3}$ ja tasandi α võrrand $ax + by + cz + d = 0$.

Sirge ja tasandi lõikepunkt kuulub nii sirgele kui ka tasandile. Lihtsaim viis lõikepunkti leidmiseks on viia sirge võrrand parameetrilisele kujule $\begin{cases} x = x_1 + s_1 \cdot t_1 \\ y = y_1 + s_2 \cdot t \\ z = z_1 + s_3 \cdot t_3 \end{cases}$. Asendades *x, y* ja *z* avaldised tasandi võrrandisse, leiame t väärtuse ning seejärel juba *x, y* ja *z* väärtused.

Ülesanne (lai matemaatika).

Leidke sirge $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+6}{4}$ *ja tasandi* $2x + y - z + 4 = 8$ *lõikepunkt.*

Lahendus. Võime kirjutada $\frac{x+1}{2} = t$, $\frac{y+3}{3} = t$ ja $\frac{z+6}{4} = t$, millest $x = 2t - 1$, $y = 3t - 3$ ja $z = 4t - 6$. Asendades need avaldised tasandi võrrandisse, saame $4t - 2 + 3t + 3 - 4t + 6 + 4 = 8$. Sellest t = 1 ja x = 1, $y = 0$, $z = -2$.

Vastus. Sirge ja tasandi lõikepunkt on $(1 ; 0 ; -2)$.

3. Hulktahukad

Laias matemaatikas õpitakse hulktahukatest prismat ja püramiidi, nende pindala ja ruumala arvutamist, prisma ja püramiidi lihtsamaid lõikeid tasandiga, samuti regulaarseid hulktahukaid. Kuna prisma pindala ja ruumala valemid on õpitud, siis on siinkohal hea näidata ka valemite tuletamist.

Kitsas matemaatikas piirdutakse püstprisma ja korrapärase püramiidiga ning nende pindala ja ruumala arvutamisega. Valemid esitatakse kordavalt. Olenevalt klassi tasemest, võib ka osa valemeid tuletada. Pindala arvutamise peamiseks teeks on vastavate tahkude pindalade summeerimine, mitte valmisvalemite kasutamine. Õpitakse nende kujundite lihtsamaid lõikeid tasandiga (hulktahuka tippe ja/või servi läbivaid). Lahendatakse praktilise sisuga ülesandeid, sealhulgas trigonomeetria- ja planimeetria teadmisi rakendades. Hulktahukate õppimisel rakendatakse varem õpitud stereomeetria asendilauseid. Nii on risttahuka diagonaali ja tahu vahelise nurga arvutamiseks vaja rakendada sirge ja tasandi vahelise nurga leidmist, püramiidi külgtahu ja põhja vahelise nurga puhul läheb vaja teadmisi kahetahulise nurga kohta jne. Tähtis on kehade tasandilise kujutamise oskuse saavutamine.

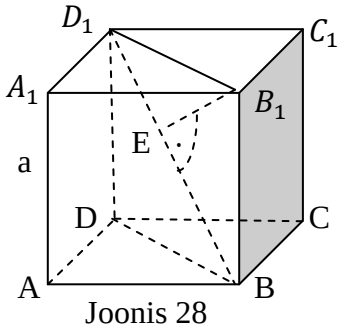
3.1 Prisma (lai; kitsas matemaatikas vaid püstprisma)

Definitsioon. **Prismaks nimetatakse hulktahukat, mille kaks tahku on vastavalt paralleelsete külgedega kongruentsed hulknurgad ja ülejäänud tahud on rööpkülikud, millel on kummagi hulknurgaga üks ühine külg.**

Ülesannete lahendamise kaudu tuleb põhjalikult selgeks õppida kolmnurkne , nelinurkne ja kuusnurkne prisma, pidades esmalt silmas korrapäraseid kujundeid. Nelinurkse prisma erijuhtudena vaadeldakse rööptahukat, risttahukat ja kuupi. Kõikide nende kujundite kohta saab koostada huvitavaid ülesandeid, alustades lihtsamatest ning suurendades järkjärgult raskusastet. Kuup tundub olevat lihtne kujund, kuid nõuab asjatundlikku käsitlemist. Ruudu diagonaalid on risti. Kas kuubi diagonaalid on risti? Ei ole.

Ülesanne (lai matemaatika).
Kuubi serva pikkus on a. Leidke kuubi tipu kaugus kuubi sellest diagonaalist, millele antud tipp ei kuulu.

Lahendus. a- kuubi serv. Leia B_1E (joonis 28).



Joonis 28

Tuleb tähele panna, et lõige BB_1D_1D ei ole ruut ning punkt *E* ei poolita kuubi diagonaali BD_1. Pythagorase teoreemi kasutades leiame kuubi tahu diagonaali $B_1D_1 = a\sqrt{2}$ ning kuubi diagonaali $BD_1 = a\sqrt{3}$. Leiame täisnurkse kolmnurga BB_1D_1 pindala $S_{BB_1D_1} = 0{,}5BB_1 \cdot B_1D_1 \quad \Rightarrow \quad S_{BB_1D_1} = 0{,}5 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = 0{,}5a^2\sqrt{2}$. Teiselt poolt on B_1E sama kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus ning $S_{BB_1D_1} = 0{,}5BD_1 \cdot B_1E \quad \Rightarrow 0{,}5 \cdot a\sqrt{3} \cdot B_1E = 0{,}5a^2\sqrt{2} \quad \Rightarrow$

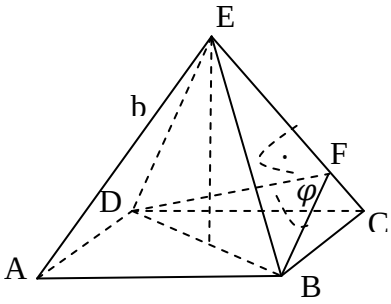
$B_1E = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ p. ü. Vastus. $B_1E = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ p. ü.

Üldkujul lahendatud ülesannet on hea korduvalt kasutada, võttes kuubi serva pikkuseks mingi arvu. Saadud vastus on kiiresti kontrollitav.

3.2. Püramiid (lai; kitsas matemaatikas vaid korrapärane püramiid)

Definitsioon. **Püramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk on hulknurk ning ülejäänud tahud on ühise tipuga kolmnurgad.**

Ka püramiidi puhul läheb vaja eespool õpitud stereomeetria asendilauseid.



Joonis 29

Ülesanne (lai matemaatika).
Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja külgserv 5 cm. Arvutage kõrvutiolevate külgtahkude vaheline nurk.

Lahendus. *ABCD* (joonis 29) on ruut külje pikkusega 6 *cm*, $b = 5cm$. Leida nurk φ. Külgtahud on kongruentsed. Arvutame ühe külgtahu pindala, saame $S_{BEC} = 12cm^2$. Kuna $BF \perp EC$, siis on *BF* selle kolmnurga kõrguseks ning *EC* aluseks. Arvutame $BF = 4{,}8cm$. Kolmnurgast *BFD* leiame $cos\varphi = \frac{(BF)^2+(DF)^2-(BD)^2}{2BF \cdot DF}$. Kuna ruudu diagonaal $BD = 6\sqrt{2}$ ja $DF = BF$, saame $cos\varphi = -0{,}5625$ ning $\varphi \approx 124°14'$.
Vastus. $\varphi \approx 124°14'$.

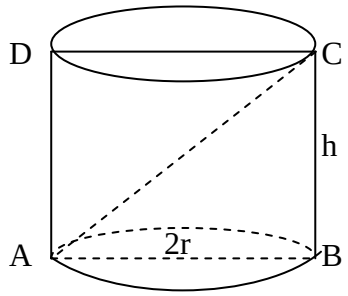
4. Pöördkehad

Laias matemaatikas õpitakse pöördkehadest silindrit, koonust ja kera, nende pindala ja ruumala. Kera puhul õpitakse ka kera segmenti, kihti, vööd ja sektorit. Ülesannete lahendamise kaudu õpitakse silindri, koonuse ja kera lõikeid tasandiga.
Kitsas matemaatikas õpitakse neidsamu kujundeid, välja arvatud kera osad. Lahendatakse praktilise sisuga ülesandeid, sealhulgas trigonomeetria ja planimeetria alaseid teadmisi rakendades. Lõigetest tasandiga vaadeldakse vaid lihtsamaid, telg- ja ristlõikeid. Pöördkehade definitsioone saab illustreerida GeoGebra abil valmistatud dünaamiliste slaidide abil.

4.1. **Silinder** (kitsas ja lai)

Definitsioon. **Silindriks nimetatakse pöördkeha, mis tekib ristküliku pöörlemisel ümber ühe oma külje.**

Ülesanne (kitsas matemaatika).
Silindri telglõige on ruut külje pikkusega 12 cm. Arvutage silindri täispindala ja ruumala.



Joonis 30

Antud. *ABCD* on ruut; $h = 2r = 12cm$ (joonis 30).

Leida S_t ja V.

Lahendus. $r = \frac{12}{2} = 6(cm)$. $S_p = \pi r^2 \implies S_p = 36\pi\ cm^2$.

$S_k = 2\pi$rh $\implies$ $S_k = 144\pi\ cm^2$. $S_t = 2S_p + S_k \implies S_t = 216\pi\ cm^2$. $V = S_p h \implies V = 432\pi\ cm^3$.

Vastus. $S_t = 216\pi\ cm^2$; $V = 432\pi\ cm^3$.

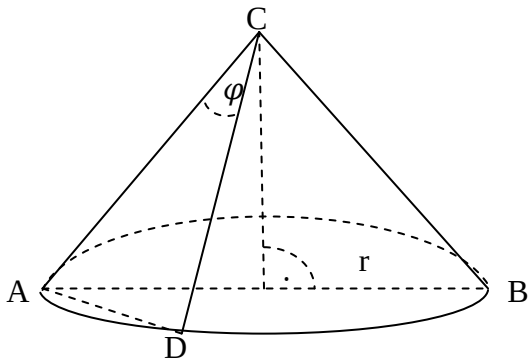
Ülesanne (kitsas matemaatika).
Palgi ristlõige on ring raadiusega 20 cm. Mitu tihumeetrit servamata laudu saab neljast 6 meetri pikkusest palgist, kui saagimisel tekkivaid jääke mitte arvestada? Vastus anda kümnendiku täpsusega.

Lahendus. Vaatleme palki silindrina, mille $r = 0{,}2\ m$ ja $h = 6\ m$. Leiame nelja palgi ruumala $V = 4\pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 6 \approx 3{,}0\ (m^3)$.

Vastus. 3 tm servamata laudu.

4.2. Koonus (kitsas ja lai)

Definitsioon. **Koonuseks nimetatakse pöördkeha, mis tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber ühe oma kaateti.**



Joonis 31

Ülesanne (lai matemaatika).
Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk. Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse kahte moodustajat. Arvutage lõike pindala, kui moodustajate vaheline nurk on $30°$ *ning koonuse põhja raadius on* $18\ cm$.

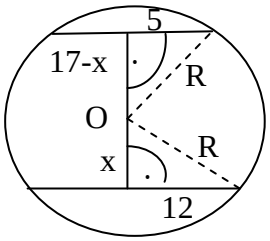
Antud. Kolmnurk *ABC* on võrdkülgne ; $\varphi = 30°$;
$r = 18\ cm$ (joonis 31).
Leida S_{ACD}.

Lahendus. $AC = BC = AB = 2r = 36\ cm$. $DC = AC = 36\ cm$. $S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DC \cdot sin\varphi \Longrightarrow$ $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 36 \cdot sin30° = 324\ (cm^2)$. Vastus. $S_{ACD} = 324\ cm^2$.

4.3. Kera (kitsas ja lai; kitsas ei õpita kera osasid)

Definitsioon. **Keraks nimetatakse pöördkeha, mis tekib ringi pöörlemisel ümber oma diameetri.**

Ülesanne (lai matemaatika).
Kera on lõigatud kahe paralleelse tasandiga nii, et lõiked asuvad teine teisel pool kera keskpunkti. Lõikeringide pindalad on $25\pi\ cm^2$ *ja* $144\pi\ cm^2$ *ning lõiketasandite vaheline kaugus on 17cm. Arvutage kera pindala ja ruumala.*



Joonis 32

Lahendus. Kera lõige tasandiga on ring ning $S_{ring} = \pi r^2$. Sellest järeldub, et lõikeringide raadiused on $5\ cm$ ja $12\ cm$ (joonis 32). Olgu ühe lõiketasandi kaugus kera keskpunktist *x,* siis teise lõiketasandi kaugus kera keskpunktist on $17 - x$. Tekib kaks täisnurkset kolmnurka, milles mõlema hüpotenuusiks on kera raadius R . Pythagorase teoreemi põhjal $x^2 + 12^2 = (17 - x)^2 + 5^2$. Sellest $x = 5$. Leiame kera raadiuse $R = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\ (cm)$. Kera pindala $S = 4\pi R^2 \Longrightarrow$ $S = 676\pi\ cm^2$. Kera ruumala $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Longrightarrow\ V = 2929\frac{1}{3}\pi\ cm^3$.

Vastus. $S = 676\pi\ cm^2$; $V = 2929\frac{1}{3}\pi\ cm^3$.

Kirjandus

1. Vabariigi Valitsuse 06.01.2011. a määruse nr 2 „Gümnaasiumi riiklik õppekava” lisa 3 https://www.riigiteataja.ee/akt/114012011002.
2. Abel, E., Abel, M., Kaasik, Ü. (1998). Koolimatemaatika entsüklopeedia.
3. Etverk, E, jt. (1972). Matemaatika kõrgematesse koolidesse astujaile.