Kas tõestuste õpetamine õpetab tõestamist?

Madis Lepik, Tallinna Ülikool

Matemaatikaõppe võib laias laastus jagada kaheks: uute matemaatiliste seoste ning seaduspärasuste omandamine ja sellele järgnev omandatu rakendamine ülesandeid lahendades. Väidan, et need kaks pole Eesti koolimatemaatikas sugugi tasakaalus, meie matemaatikaõpe on tugevalt ülesannete lahendamise suunas kreenis. Protseduurilised oskused ja vilumused on meil tugevalt eelisarendatavad võrrelduna matemaatika „tegemise“, loogilise arutlemise ja seoste mõistmise ning nende iseseisva tuletamisega. Üheks selle indikaatoriks on ka meie koolimatemaatika praktikast kaduma hakkav deduktiivne arutelu ja tõestamine.

Käesoleva kirjutise raames püüme rahvusvahelisele erialakirjandusele tuginedes selgitada tõestamise rolli matemaatikaõppes, Eesti õppekavast ja õpikutest lähtuvalt analüüsida seda meie koolimatemaatikas ning arutleda, kuidas tõestamise õpetamist paremini korraldada.

1. Tõestamise õpetamisest eri aegadel

Võrreldes koolimatemaatika aukartustäratava ajalooga (esimesed eestikeelsedki matemaatikaõpikud ilmusid juba 1806.a) on tõestamine matemaatikaõppes üsna uus asi. Tõestused ilmusid kooliõpikutesse alles 20. sajandi alguses ja seda mõistagi planimeetria kontekstis. Ulatuslikumalt jõudis deduktiivne tõestamine koolimatemaatikasse siiski alles 1960ndatel aastatel rahvusvahelise matemaatikahariduse uuenduslaine (nn *New Math*) harjal. Selle käigus viidi gümnaasiumi matemaatikakursusesse arvukalt kõrgema matemaatika elemente (tuletis, integraal, statistika) ja juurutati geomeetria aksiomaatiline käsitlus.

Õige pea aga selgus, et selline käsitlus polnud massihariduse tingimustes keskmisele õpilasele jõukohane ja hävitas igasuguse positiivse suhtumise ainesse. Nn. *Uue Matemaatika* laialdane läbipõrumine andis arusaadavalt tagasilöögi ka tõestamise õpetamisele. Mitmetes riikides toimiti loosungit „Tagasi baasteadmiste juurde“ („Back to basics“) järgides, muutes koolimatemaatika algoritmipõhiseks rehkendamise treenimiseks ja kaotades sealt igasuguse deduktiivse arutelu.

1990ndatel aastatel hakkas pendel jälle tagasi liikuma: paljudes riikides seati eesmärgiks tuua tõestamine koolimatemaatikasse tagasi (seda siiski vaid nn akadeemilise gümnaasiumiharu õppekavva ja eelkõige planimeetria konteksti).

Analoogilised arengud tegi läbi ka Eesti matemaatikaõpetus. Ometi peame tõdema, et meie koolimatemaatika suunajad on targalt püüdnud enamust neist äärmuslikest kannapööretest pehmendada. Kindlasti ka Nõukogude matemaatikahariduse mõjutusel pole tõestused meie õppekavast ja matemaatikaõpikutest kadunud. Seetõttu on meil ilmselt üllatavgi kuulda, et näiteks Põhjamaades on tänaseks juba mitu põlvkonda omandanud gümnaasiumist matemaatikahariduse ilma vähimagi kokkupuuteta tõestamisega. Võib arvata, et nende hulgas on ka üksjagu tänaseid matemaatikaõpetajaid, kellele viimaste aastate rahvusvaheliselt domineeriv taotlus – süvendada koolis matemaatilise arutlusoskuse ja tõestamise õpetust, on üsna raskesti realiseeritav.

Ometi on suund sellele üsna selge. Nii näiteks on matemaatikahariduse üks rahvusvahelisi lipulaevu – Ameerika Matemaatikaõpetajate Assotsiatsioon (NCTM) – oma 2000. aastal vastuvõetud standardites ühe seitsmest matemaatikaõppe kesksete eesmärkide grupis pealkirjastanud: „Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine“. Seatakse sihiks, et kogu matemaatikaõpe algkoolist kuni gümnaasiumini välja peaks pakkuma kõigile õpilastele ohtralt jõukohaseid võimalusi sõnastada iseseisvalt matemaatilisi väiteid ja neid ka tõestada. Väidetakse, et selle eesmärk pole mitte üksnes ega ka mitte eelkõige sügavam arusaam matemaatika olemusest, vaid tänapäeva ühiskonnas edukaks hakkamasaamiseks nii vajalik õpilase loogilise mõtlemise arendamine.

2. Eesti uus õppekava tõestamisest

Eesti põhikooli ja gümnaasiumi uued ainekavad pööravad matemaatilise mõtlemise ja tõestusoskuse arendamisele suurt rõhku. Oleme ses mõttes rahvusvahelise arengusuunaga heas kooskõlas. Kõigi kooliastmete matemaatikaõppe eesmärgid sisaldavad meil märksõnu nagu arutlemine, analüüsimine, üldistamine, selgitamine, põhjendamine. Matemaatikapädevus, mille kõik õpilased ainekava järgi peaksid saavutama, tähendab loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamise oskust.

Analüüsime järgnevas põhikooli ja gümnaasiumiastme ainekavasid veidi täpsemalt ja selgitame, mida seal tõestamise õpetamisest räägitakse.

Tõestused ja tõestamine on ainekavas esmakordselt teemana märgitud kolmanda kooliastme matemaatikas (7…9. kl). On tähelepanuväärne, et programmis nähakse ette spetsiaalne teema tõestamise olemusest (see on Eesti koolimatemaatikasse Aksel Telgmaa poolt juurutatud

tänuväärne traditsioon). Tõestamisoskust kavandatakse selles treenida eelkõige planimeetria kontekstis (Pythagorase ja Thalese teoreem, kolmnurkade võrdsus ja sarnasus jmt) aga ka arvuteoorias (jaguvus, tehted paaris- ja paaritute arvudega).

Ainekava sedastab, et kolmanda kooliastme lõpuks peavad õpilased olema:

- võimelised kirjeldama mõisteid teoreem, eeldus, väide ja tõestus;
- võimelised tõestama mõningaid teoreeme;
- omandanud esmased tõestamise oskused.

Need on äsja formaal-loogilise mõtlemise staadiumisse jõudnud 15-aastaste õpilaste jaoks ambitsioonikad eesmärgid. Piaget'st lähtuvalt pole sugugi mitte kõik selles arengufaasis veel võimelised jälgima veidigi pikemaid deduktiivse arutelu ahelaid ning mõistma taolise mõtteviisi vajalikkust. Ainekavas kasutatavad väljendid „mõningaid teoreeme" ja „esmased oskused" jätavad muidugi igale õpetajale piisava vabadusastme eesmärkide lati konkreetse kõrguse seadmisel oma parimast äratundmisest ning õpilaste võimetest lähtuvalt. Rõhutaksin, et kindlasti on siin valmistõestuste perfektsest ülesütlemisest märksa olulisem õpilaste lülitumine sisulisse matemaatilisse arutellu ja deduktiivse tõestamise olemuse mõtestamine.

Tõestamise õppimise põhiraskus lasub gümnaasiumiastmel. Vastav ainekava väidab: gümnaasiumi lõpetaja arutleb loovalt ja loogiliselt, püstitab matemaatilisi hüpoteese, põhjendab ja tõestab neid. Arusaadavalt tehakse siin põhimõtteline eristus kitsa ja laia matemaatika eesmärkides.

Kitsa kava järgi õpetatakse kirjeldavalt ja näitlikustavalt, matemaatiliste väidete põhjendamine toetub intuitsioonile ning analoogiale. Lai kava aga nõuab, et olulisel kohal oleks tõestamine ja põhjendamine. Laia kava põhikursuste kirjeldusest aga õpilastelt eeldatava tõestamise ja tuletamise kohta täpsemat lisainfot ei leia. Seal on loetletud hulgaliselt teoreeme, valemeid ja võrrandeid, mille käsitlus ilmselt eeldab tõestamist või tuletamist. Samas on aga sõna „tõestab" kasutatud seal vaid korra ja „tuletab" seitse korda. Üldiselt jääb siiski mulje, et (vaikimisi) eeldatakse enamuse valemite, võrrandite, omaduste jmt käsitlemist tõestamise või tuletamise kaudu. Ja jällegi jätavad ainekava autorid õpetaja otsustada, kas neid tõestusi-tuletusi kasutatakse vaid uute teadmiste õpetajapoolseks kommunikeerimiseks või nõutakse õpilastelt ka nende taasesitamise oskust.

Siit johtuvalt tuleb küsida, kuidas (lähtudes ainekavast) valmistatakse õpilased ette nende arvukate tõestuste ja tuletamistega kohtumiseks. Vastuseks on: ei valmistatagi. Ühegi ainekavas

ette nähtud põhikursuse sisu ei sisalda selleks hädavajalikke metateadmisi tõestamisest: tõestamise olemusest ja tõestusviisidest, teadmisi teoreemi, eelduse, väite, piisavuse, tarvilikkuse jmt kohta. Näib, et ainekava autorid loodavad ses osas põhikoolikursuses sisaldunud napile käsitlusele. Siinkirjutaja arvates pole see lootus aga kuigivõrd põhjendatud.

Tõele au andes tuleb nentida, et seda lünka täidaks hästi ainekavas sisalduv valikkursus „Loogika“. Paraku pole ju isegi laia matemaatika õppijatele see kursus kohustuslik ja päris kindlasti ei õpita seda enne põhikursustes sisalduva „tõestusmaratoni“ algust.

Kindlasti on valmistõestuste läbitöötamine üheks oluliseks teeks iseseisva tõestusoskuse omandamisel. Ometi pole see piisav: kuitahes suure hulga valmistõestuste läbitöötamine ei tee veel kellestki oskuslikku tõestajat. Seadis ju ainekava eesmärgi, et õpilased oleksid võimelised ise püstitama matemaatilisi hüpoteese, põhjendama ja tõestama neid. Selle väga olulise eesmärgi saavutamiseks on vaja iseseisvat tõestusülesannete lahendamise praktikat. Veelgi parem, kui tõestatavad väited kasvaksid välja õpilaste endi püstitatud hüpoteesidest. Paraku on ainekava selles osas äärmiselt napisõnaline; ainsa viite õpilaste iseseisvale tõestusülesannete lahendamise vajadusele leiame vaid planimeetria kursuse kirjeldusest. Üldeesmärgina esitatud õpilaste võime matemaatiliselt arutleda, argumenteerida ja oma hüpoteese tõestada jääb ainekavas konkreetsete tegevustega katmata. Need tegevused tuleb õpetajal endil kavandada. Häid ideid selleks leiab ohtralt näiteks arvuteooria ja diskreetse matemaatika valikkursuste sisukirjeldustest.

3. Tõestamisest Soome ja Rootsi õppekavades

Meie õppekava tõestusalaste taotluste laiemasse konteksti asetamiseks heidame võrdleva kiirpilgu ka Soome ja Rootsi õppekavadele.

Soome 2006.a. rakendunud õppekava põhikooliastmes tõestamist ja valemite tuletamist pole. Küll aga on tugevalt rõhutatud matemaatilise arutlusoskuse arendamist, eelkõige läbi probleemülesannete lahendamise ja matemaatiliste seaduspärasuste „avastamise“ õpilaste poolt. Gümnaasiumi laia matemaatika kavas on eesmärkide tasandil esindatud küll matemaatilise mõtlemise arendamine, arutlemine matemaatikale omast keelt kasutades ja arutluste tõesuse hindamine, aga tõestustest ja tõestusülesannete lahendamisest juttu pole. Tõestuse temaatika puudub täielikult ka õppesisu loetelust. Ainsana kajastub tõestamine vaid ühe valikteema – matemaatiline loogika – sisukirjelduses.

Ka gümnaasiumi õppekavas on soomlastel arvukalt viiteid eksperimenteerimisele ja uurimuslikule õppele: õpilasi tuleb innustada üldistusi tegema ja hüpoteese püstitama ning neid siis ka põhjendama.

Rootsi põhikooli õppekava ei sisalda sõnu „teoreem“, „tõestamine“ või „tuletamine“. 2011.a rakenduva gümnaasiumikava reaalteaduslik suund on aga senikehtinud kavaga võrreldes läbi teinud olulise muutuse. Kuigi nn üldosa matemaatikaõppe eesmärke selgitades deduktiivset lähenemist ja tõestamist ei käsitle, kuid õppesisu kirjeldus annab konkreetse loendi tõestustest ja tuletamistest, mida on vaja käsitleda. See loend sisaldab meilgi tavapärast (Pythagorase teoreem, trigonomeetria valemid, siinus- ja koosinusteoreem, kujundite pindala valemid jne) kuid on meile harjumuspärasest mõnevõrra napim. Ka Rootsi õppekava jätab avamata, mis tasemel peab tõestuste käsitlemine koolis toimuma ja mida selles osas õpiväljunditena nõuda. Erinevalt meist näeb aga Rootsi gümnaasiumikava ette ka tõestamise olemuse ja sellega seotud mõistete (definitsioon, teoreem jne) ning tõestusvõtete käsitlemise. Ka rõhutatakse läbivalt, et reaalteaduslikus suunas matemaatika õppimine peab sisaldama õpilaste uurimuslikku tegevust.

4. Tõestamine meie koolipraktikas

Nagu eespool nägime, jätab ainekava tõestamisega tegelemise määra ja õpilastelt ses osas oodatavad õpiväljundid konkretiseerimata. Sellises olukorras määravad reaalse õppesisu suuresti õpikud. Analüüsides meie keskkooli matemaatikaõpikuid, leiab sealt ohtralt valmistõestusi. Kohati näib, et autorid pole endalt küsinudki, miks tõestada? Tõestuste esitamine on ju matemaatikas üldiselt omaksvõetud viis kommunikeerida matemaatilisi seoseid ja ju siis peab see nii olema ka matemaatikaõppes. Sellise tõestamise esmane funktsioon on esitatavate väidete põhjendamine, mitte aga tõestamise õpetamine.

Kas sellist stiili kannavad edasi ka õpetajad? Tuleb nentida, et õpetajate arusaamu tõestustest ja tõestamisest koolipraktikas meil uuritud pole, seega saab kõnelda vaid oletustest. Arusaam, et matemaatika on rajatud deduktiivsele arutlusele ja rangetele põhjendustele ning et seetõttu ei tohi ka koolimatemaatika pakkuda vaid valmistõdesid ja algoritme tüüpolukordades rakendamiseks, näib siiski olevat meie õpetajaskonnas üldlevinud. Tegelikus koolipraktikas aga kipub deduktiivne arutelu ja tõestamine jääma tagaplaanile. Esitada uued teadmised-seosed elegantsete tõestuste kaudu, mille tulemused kinnistatakse seejärel ohtras tüüpülesannete harjutamisprotsessis, on levinud muster keskkooliastme matemaatikatunnis. Mõnigi kord on tagapingis istuvale

tunnivaatlejale jäänud mulje, et sellise tõestamise ainus funktsioon on tõestada, et õpetaja ise suudab tõestada – õpilasi arutellu sisuliselt ei kaasata. Tõsi, viimasel ajal kostab üha sagedamini, et ka valmistõestuste esitamisest on õpetajad loobunud. Õpilastele tunduvad tõestused liiga abstraktsed ja vähemotiveerivad ning nad on meeleldi valmis õpikutes esitatud valemeid-seoseid ka ilma tõestusi läbitöötamata uskuma. Nii juhtubki, et esmakordselt kohtuvad värsked tehnika või reaalteaduste üliõpilased tõestamisega alles kõrgkooli matemaatikaloengutes.

5. Miks õpetame tõestamist?

Esimeseks vastuseks sellele küsimusele on muidugi stampväide, et tõestused on kesksel kohal matemaatikas ja seetõttu pole võimalik neid vältida ka matemaatikat õpetades. Püüame aga siiski edasi mõeldes selgitada, millist rolli peavad tõestused etendama koolimatemaatikas.

Sellele küsimusele vastuse otsimiseks vaatleme tõestuse funktsioone, st analüüsime, milleks matemaatikud ise tõestavad ja kolleegide tõestusi uurivad. Neid funktsioone on mitu, toon alljärgnevas esile kolm olulisemat.

Esiteks muidugi verifitseerimine – tõestus veenab meid väite paikapidavuses, st vastab küsimusele kas on tõene? Aga see ei ole sugugi ainuke ja isegi mitte olulisim funktsioon. Isegi professionaalsed matemaatikud on ilmselt valmis uskuma tarkades raamatutes või teadusajakirjades esitatud väiteid ilma tõestuseta. Miks nad siis ikkagi kolleegide tõestuskäike uurivad? Siit jõuame tõestuse teise ja olulisima funktsiooni juurde.

Selleks on selgitamine – tõestus viib meid sisulisele arusaamale väite olemusest, vastab küsimusele miks on väide tõene? Ka matemaatikuid endid huvitab eelkõige just see aspekt, mitte pelgalt tõesuse konstateerimine ise.

Ja kolmandaks oluliseks funktsiooniks on süstematiseerimine – tõestus seob erinevaid teadmisi ühtseks terviklikuks deduktiivseks arutlusahelaks, kommunikeerides sel moel intuitiivselt tajutud tõde. Sageli just selle funktsiooni kaudu tajume matemaatika ilu.

Olen seisukohal, et pelgalt esimese funktsiooni täitmiseks pole koolimatemaatikas mõtet tõestada. Õpilane on kindlasti valmis uskuma õpikut ja õpetajat, ega nõua talle pakutavatele matemaatilistele väidetele deduktiivset tõestust. Seega koolis tõestusi esitades peame kindlasti mõtlema ülejäänud kahele funktsioonile. Eriti oluline on selgitamise funktsioon. Mitte kõik

tõestused ei pruugi olla õpilasele selgitavad, väite kujunemise loogikat avavad. Vaatleme näiteks kaht erinevat tõestust väitele, et esimese n naturaalarvu summa avaldub kujul $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Üheks võimaluseks seda väidet tõestada oleks kasutada matemaatilist induktsiooni. Läbi kolme sammu ning mõne algebralise teisenduse jõuame kindlasti tulemusele – oleme väite tõestanud.
Teine võimalus on esitada alljärgnev mõttekäik.

$$S = 1 + 2 + \ldots + n$$

$$S = n + (n-1) + \ldots + 1$$

$$\overline{2S = (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n)} \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

On ilmne, et erinevalt esimesest on teisena esitatud tõestus seletav: see avab hästi seose tekkimise loogika ja aitab tõestatavat mõtestada. Seega: kui on võimalik valida mitme tõestusloogika vahel, tuleks koolis kindlasti eelistada seletavaid tõestusi, sest need muudavad tõestuse mõtestatuks.

Koolimatemaatikas ongi põhiküsimuseks, kuidas muuta tõestamisega tegelemine õpilastele mõtestatuks – tegevuseks, mis ei piirduks vaid valmistõestuste memoreerimise ja ladusa ülesütlemisega. Laiemas plaanis seisab meie ees küsimus, kuidas parimal moel arendada gümnasistide matemaatilist mõtlemist, nende võimet näha seoseid, iseseisvalt konstrueerida seoste ahelaid ja kinnitada tuletatu tõesust.
Lisaks eelkirjeldatud tõestamise funktsioonide silmaspidamisele soovitatakse veel avastusõpet. Õppimine tuleks korraldada nii, et see inspireeriks õpilasi endid esitama küsimusi ja püstitama hüpoteese, tegema järeldusi ning ka põhjendama ja tõestama neid. Iseseisev seoste „avastamine“ ja nende tõesuse selgitamine nii endale kui kaaslastele on kõige loomulikumaks teeks matemaatilise tõestamise vajaduse mõistmisele.