Dünaamilised slaidid geomeetria õpetamisel

Tiit Lepmann, Tartu Ülikool

Matemaatikaõpetust toetavat geomeetria-alast dünaamilist näitlikku õppematerjali võib internetist leida hulgaliselt. Enamuses on see võõrkeelne ega ole tavaliselt otseselt seotud meil käibel olevate õpikutega. Olemasolevatest emakeelsetest materjalidest väärivad suurimat tähelepanu tööd, mis seonduvad funktsioonide graafikute joonestamisega, graafikute teisendustega ja funktsiooni omaduste uurimisega /13; 14/ ning Jane Albre /1;2;3/ dünaamilised slaidid 12. klassi matemaatikaõpiku juurde. Mitmeid geomeetriaõpetust toetavaid dünaamilisi slaide leiame veel eestikeelselt matemaatika didaktika veebilehelt http://matdid.edu.ee . Seal olevate slaidide abil on õpetajal võimalik illustreerida, õpilasel aga iseseisvalt uurida geomeetriliste objektide omadusi. Enamus selle lehe slaididest on toeks vaid põhikooli geomeetriateemade õpetamisel.

Gümnaasiumis õpitavad matemaatikateemad on sageli vaid kaudselt seotud geomeetriaga ja seetõttu ei nähta, et õpitavat on võimalik ka geomeetria dünaamiliste slaididega toetada. Järgnevas püüangi õpetajale selles osas nõu anda. Loomulikult pakun ka materjali ja ideid dünaamiliste slaidide kasutamiseks gümnaasiumi geomeetriateemade õpetamisel, kuid põhieesmärk on toetada ja julgustada õpetajaid ise selliseid slaide tegema.

Tarkvaraprogrammi GeoGebra suur hulk seni toimunud koolitusi õpetajatele lubab arvata, et küllalt paljud meie õpetajatest on suutelised GeoGebra programmi ise edukalt oma töös rakendama. Seda mitte ainult passiivselt, teiste tehtu tarbijana, vaid aktiivselt – ise materjale luues. Samuti on ilmunud artikleid, kus pakutakse tehnilisi nippe ja ideid geomeetria dünaamiliste slaidide koostamiseks /4;5;6;7;8;9/. Seetõttu ei esitata järgnevas alati väga detailseid juhiseid slaidide koostamiseks; kohati piirdutakse vaid slaidi koostamise üldideestiku ja selle kasutamisvõimaluste tutvustamisega. Loodan, et leidub piisavalt entusiaste, kes need ideed realiseerivad ja tehtu oma kolleegidele vahendavad. See töö on küll ajamahukas, aga huvitav ja väärib kindlasti tegemist. Just see on tee, mis võimaldab meil muuta matemaatika ka gümnasistide silmis huvitavaks eksperimenteerivaks ja atraktiivseks õppeaineks.

Esmalt kordame aga üle mõned põhitõed, millest peaks lähtuma slaidide koostamisel ja kasutamisel.

Vormistuslikke soovitusi dünaamilistele slaididele

Dünaamiliste slaidide koostamisel peab kindlasti arvestama psühholoogia ühe põhitõega: *inimese taju on valiv.* Küsimus on siin vaid selles, millest see valik sõltub? Kõige üldisemalt liigitades võib öelda, et taju valivus sõltub:

- tunnetajast tingitud seesmistest teguritest (eeltase, psüühiline seisund, motiveeritus jt);
- tunnetatavast tingitud teguritest.

Kuna vaatleme slaidide koostamist, siis peatume lühidalt just teisel tegurite rühmal. Erinevad autorid on toonud siinkohal välja järgmist. Taju sõltub:

- tajutava objekti korrektsusest;
- olulise kontrastsusest tajuväljas;
- esituse skemaatilisusest ja kontuurisusest, seega parajast detailsusest;
- olulise objekti, omaduse vms õigest asendist tajuväljas;
- tajufoonist jt.

Loomulikult on selliseid üldiseid faktoreid veelgi. Neist lähtuvalt on multimeedias slaidide koostamisele sõnastatud ka tunduvalt detailsemaid soovitusi /11;15/.

Tekstilise informatsiooni juures peetakse oluliseks näiteks:

- teksti paigutust ja formaati. Vältida tuleks poolitamist, kasutada lõiguvahesid, jaotada tekst ekraanil ühtlaselt, pealkirja tekstistiil olgu erinev põhiteksti stiilist, ühel lehel ei võiks kasutada üle kahe kirjastiili ning vältida tuleks raskestiloetavaid tähekujusid ja suurtähtedes teksti. Samuti tuleks eelistada teksti joondamist vasakule;
- seda, kuidas tuua tekstist välja olulist infot. Olulisuse hierarhiat aitavad edasi anda elementide grupeerimine (loetelud, raamid), stiil (bold, suurtähed), suurus ja värv (mitte üle 3 värvi leheküljel). Samas soovitatakse vältida allajoonimist, liikuvaid tekste ja kaldkirja;
- teksti kvaliteeti. Tekst olgu lühike ja korrektne (ilma vigadeta), üleminekud teemade vahel selgelt eraldatud. Loomulikult peab tekst vastama kasutaja vanuseastmele. Kasuks tuleb isikuliste vormide *teie* ja *meie* kasutamine. Selline tekst kutsub koostööle.
- teksti suurust. Tekst peab olema loetav ka auditooriumi viimastest ridadest.

Graafilise informatsiooni esitamise puhul soovitatakse kõige üldisemas plaanis silmas pidada kõike järgmist.

- Arvutipõhine õpitarkvara on eelkõige visuaalne meedium, seepärast peab see sisaldama enam visuaalsust ja vähem teksti.

- Kuna graafika, eriti animatsioonid, tõmbavad enam tähelepanu kui tekst, siis tuleb jälgida, et graafikaga esitataks olulist infot.
- Vältima peab kolmemõõtmelisi graafikuid ja jooniseid, sest sealt väljaloetavat infot on keerulisem töödelda.
- Graafika ja sellega seonduv tekst on soovitav esitada üheaegselt. Tekst tuleks paigutada graafika kõrvale, mitte alla ega üles. Nii kasutame ekraani pinda ratsionaalselt.
- Põhjuseta illustratsioonid ja kujundid on arusaamatud ning ajavad õppija segadusse.
- Keeruka animatsiooni korral tuleb kindlasti lubada õppijale pause, kordamist ja mõnedel juhtudel ka kiiruse muutmist.

Erilist tähtsust dünaamiliste slaidide koostamisel omab värvide kasutamine.

- Värvide valikul on olulised värvide omavahelised seosed. Mõned värvid töötavad üksteisega koos, teised töötavad üksteise vastu. Värvide omavahelist mõju tuleb vaadata konkreetses keskkonnas, sest mingi värvi sobivus või mittesobivus sõltub suuresti naabervärvidest. Kokkusobivad värvid loovad õppimiseks soodsa meeleolu.
- Vältida tuleb enama kui 3 värvi üheaegset kasutamist. Ei soovitata kasutada värvikombinatsioone punane-roheline, punane-sinine, sinine-kollane, sinine-roheline, sest need on raskesti tajutavad (nt värvipimedatel).
- Värvide kasutamisel tuleb olla järjekindel ning neid tuleks rakendada rõhutamiseks, olulisele infole tähelepanu juhtimiseks ja erinevuste väljatoomiseks. Kui ühel slaidil on näited ühe värviga, siis nii peaks see olema ka järgnevatel.
- Värve tuleks kasutada vastavalt ühiskonna tavadele. Punase värviga võiks kasutamisel olla ettevaatlik.
- Tuleks jälgida, et tekiks hea kontrast esiplaanil ja tagapõhjaks olevate värvide vahel, eriti teksti- ja taustavärvi vahel.

Nagu märgitud, on tähtis ka olulise paiknemine tajuväljas. Esmajärjekorras tuleks silmas pidada seda, et suuremad kujundid ja tugevamad värvid tõmbavad enam tähelepanu kui väikesed ja mahedad. On selgitatud, et:

- inimese silm fikseerib esimesena ekraanil ülemises vasakus nurgas oleva;
- inimese pilk liigub üldjuhul kõige suuremalt objektilt väiksematele;
- silm fikseerib esmalt kõige tugevama (tumedama) värvi.

Samuti on täheldatud, et kasutajad kalduvad ignoreerima infot, mida nad ei näe, seega:

- kogu slaidi tekst peab olema vähemalt animatsiooni lõpus ekraanil tervikuna nähtav.

Dünaamiliste slaidide puhul on sageli vältimatu nuppude kasutamine. Nendega saame avada uusi slaidi tekstilõike, konstruktsiooni etappe jne.

Nuppude paigutamisel slaidile tuleks arvestada seda, et:

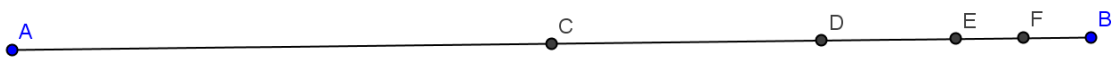
- nende kasutamisega ei liialdataks;
- nuppude funktsioon oleks selge;
- nupu funktsiooni selgitav tekst oleks äärmiselt lihtne, lühike ja lakooniline;
- nende asend tajuväljas oleks sobiv. Üldjuhul võiksid need olla ekraani alumises servas või siis ka vahetult avatava graafika- või tekstiosa kõrval.

Ja lõpuks, slaidide üldkujundus peab jääma üht laadi slaidide puhul samaks. Pannes õppematerjali pealkirju, alapealkirju ja muud infot kogu aeg enam-vähem samasse kohta ning sama stiiliga, on õppijatel lihtsam keskenduda olulisele.

Vaatleme järgnevas dünaamilise geomeetria slaidide koostamist ja kasutamisvõimalusi gümnaasiumi matemaatika mõningate kursuste juures.

Geomeetriline tugi mittegeomeetriliste teemade puhul

Kuigi enamus gümnaasiumi teemadest ei kuulu geomeetria valdkonda, on nii mitmedki neis käsitletavad küsimused geomeetriliselt illustreeritavad või uuritavad. Vaadeldes erinevate arvuhulkade omadusi, võime **ratsionaalarvude hulga tihedust** illustreerida dünaamilise slaidiga, millelt selgub, et iga kahe ratsionaalarvu vahel leidub alati vähemalt üks ratsionaalarv, näiteks antud arvude aritmeetiline keskmine (vt joon 1.). Selleks piisab vaid lõigu *AB* konstrueerimisest (soovitavalt *x*-teljega paralleelselt) ja selle poolitamisest menüü valikuga *Keskpunkt*. Edasi poolitame saadud poole antud lõigust jne. Soovi korral lisame ka punktidele koordinaadid. Slaidi kasutamisel kuvame ekraanile konstruktsioonisammude navigeerimisrea ja seda kasutades näeme, et iga kahe arvu vahele mahub tõepoolest lõpmatult palju arve. Kui poolitatav lõik osutub juba liiga lühikeseks, võime seda hiire rulliku abil ekraani mastaapi muutes suurendada ja taas kirjeldatud poolitamist jätkata. Seda, kas saadud arvud on ka ratsionaalarvud, tuleb loomulikult eraldi põhjendada (kahe ratsionaalarvu aritmeetiline keskmine on alati ratsionaalarv).



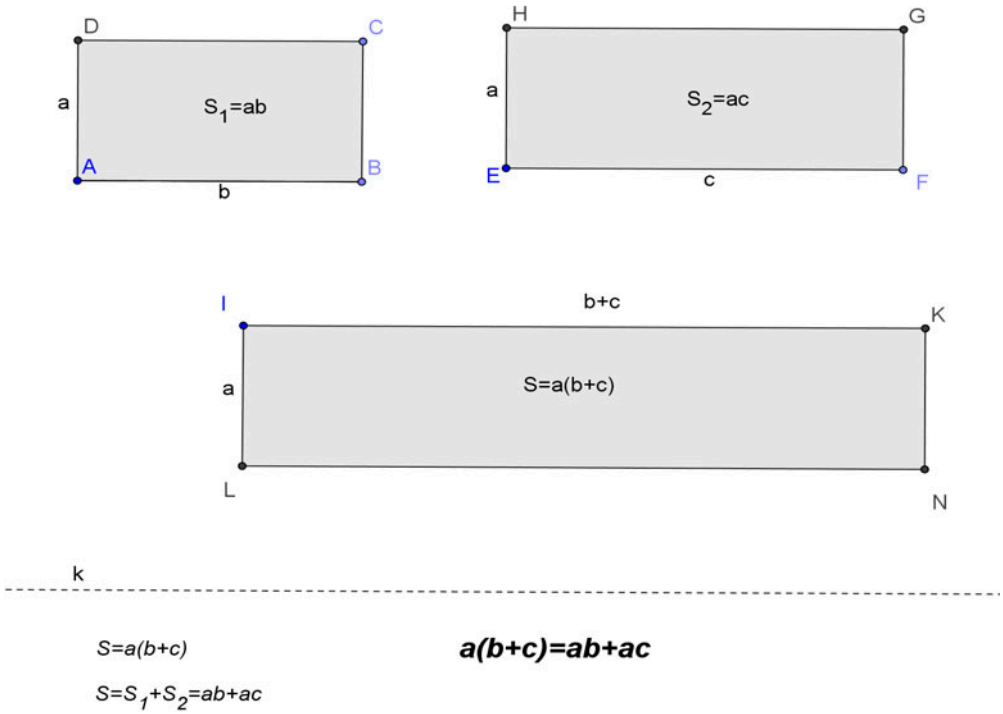
Joon. 1. Arvuhulga tiheduse illustreerimine

Tehete omaduste käsitlemisel saab **korrutamise jaotuvuse seadust liitmise suhtes** illustreerida geomeetriliselt, toetudes ristküliku pindala valemile. Selleks võiks valmistada slaidi, millel on võimalik ristkülikud külgedega *a* ja *b* ning *a* ja *c* paralleellükkega lohistada ristkülikule külgedega *a* ja *b*+*c* (vt joon 2.).

Selle slaidi loomiseks joonestame esmalt *paralleellükkega lohistatava vaba ristküliku*. Kujundit loeme vabaks, kui kujund on võimalikult paljudest selle punktidest muudetav selliselt, et pärast muutmist kujundi liik säilib. Näiteks, lohistades ristkülikut ühest selle tipust, saame tulemuseks alati ristküliku. Seejuures viimane ristkülik ei pruugi olla sugugi sarnane esialgsega.

Soovitud ristküliku *ABCD* joonestamiseks läbime järgmised etapid. Konstrueerime

- esmalt sirge *k*, mille suhtes kõikide järgnevas konstrueeritavate ristkülikute üks külg jääb paralleelseks;
- mingist suvalisest punktist sirgega *k* paralleelse sirge ja kanname sellele punktid *A* ja *B*;



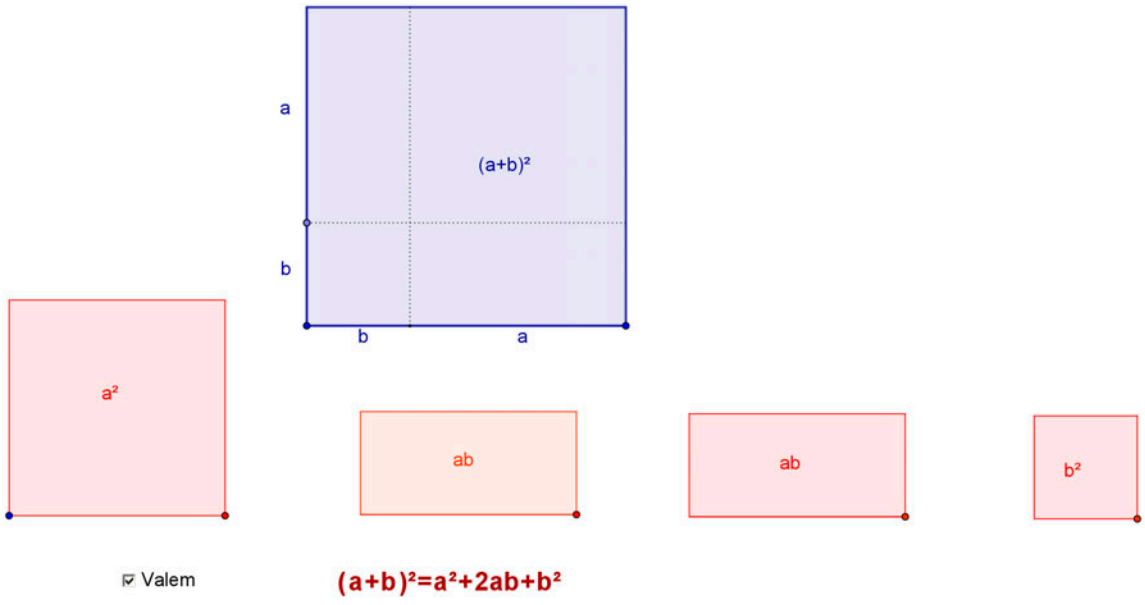
Joon. 2. Korrutamise jaotuvuse seadus liitmise suhtes geomeetriliselt

- lõigu *AB* otspunktist *B* ristsirge sellele lõigule ja asetame saadud sirgele vaba punkti *C*;
- punktist *C* paralleeli sirgele *k* ning punktist *A* paralleeli sirgele *BC*. Fikseerime viimati saadud sirgete lõikepunkti *D* ja joonestame ristküliku *ABCD*.

Ristküliku *EFGH* konstrueerime sarnaselt ristkülikuga *ABCD*. Ainuke erinevus seisneb siin selles, et punkti *F* läbival ja sirgega *EF* ristuval sirgel oleva punkti *G* määrame selliselt, et

FG=BC. Selleks tuleb kasutada menüü valikut *Sirkel*. Ristküliku *LNKI* konstrueerimisel valime lõigu *LN=AB+EF* ja lõigu *KN=BC* (menüü valik *Sirkel*). Pärast seda võime saadud ristkülikute tippudes olevad tähed peita ja pealdistena (kohtmenüü valik *Omadused*) lisada tähised *a, b, c* ning vastavad valemid. Saadud slaidil on kõik ristkülikud lohistatavad. Lohistades kaks väiksemat ristkülikut suurimale, saamegi visuaalselt illustreerida valemi $a(b+c)=ab+ac$ kehtivust.

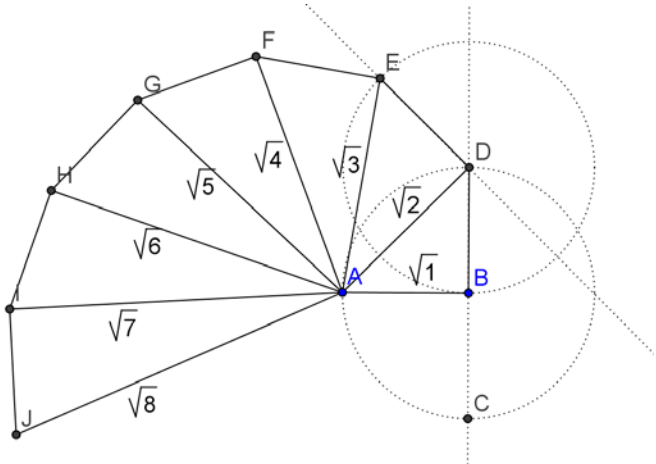
Analoogiliselt esitatuga saame konstrueerida slaidid **korrutamise abivalemite** geomeetriliseks illustreerimiseks. http://matdid.edu.ee veebilehelt leiame näiteks järgmise dünaamilise slaidi.



Joon. 3. Summa ruut geomeetriliselt

Sellel slaidil saame väiksemad ristkülikud lohistada suurde ruutu ja veenduda, et summa ruudu valemi kehtib ka geomeetriliselt.

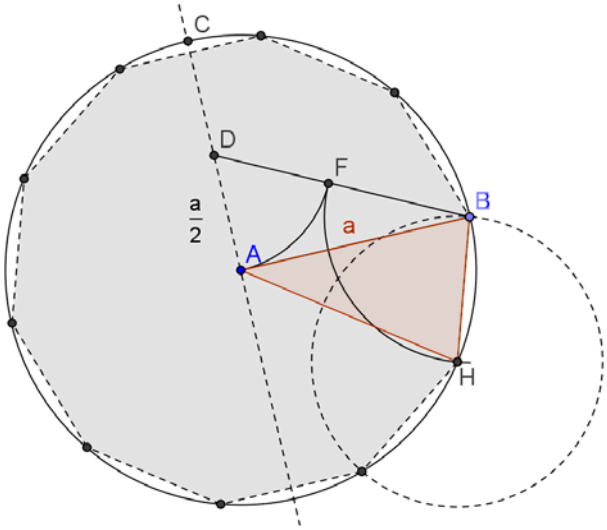
Juurte temaatika käsitluse atraktiivsemaks muutmisel võiks õpilastele tutvustada kindlasti järjestikuste naturaalarvude ruutjuurte lehvikut, spiraali (vt joon 4.). Jooniselt näeme, kuidas täisnurksete kolmnurkade hüpotenuusid moodustavad järjestikuste naturaalarvude ruutjuurte jada. Seejuures lähtekolmnurga kaatetid on ühiku pikkused. Iga järgneva kolmnurga üheks kaatetiks on aga



Joon. 4. Ruutjuurte lehvik

eelneva hüpotenuus ja teiseks kaatetiks ühiku pikkune lõik. Konstruktsioonisammude navigeerimisriba abil saame etapphaaval näidata uute kolmnurkade lisandumist. GeoGebra programm võimaldab lõikudele lisada ka nende pikkused. Nii saame soovi korral jooniselt leida ka vastavate juurte väärtused.

Eraldi tähelepanu osaliseks juurte käsitlemisel võiks saada kuldse suhte mõiste. Seda eriti laia kursuse raames. 10. klassi matemaatikaõpiku /10 /vastava kobarülesande (ül nr 198), mitmeid alaülesandeid oleks mõistlik illustreerida isevalmistatud dünaamiliste slaididega.



Joon. 5. Korrapärase kümmenurga konstrueerimine

Teatavasti on kuldse suhte väärtus $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Lõigule a kuldse suhte konstrueerimisel tuleks lähtuda täisnurksest kolmnurgast kaatetitega a ja $\frac{a}{2}$ (vt kolmnurk ABD joonisel 5). Selle kolmnurga hüpotenuus avaldub kujul $\frac{a}{2}\sqrt{5}$. Lahutades sellest $\frac{a}{2}$ saamegi kuldses suhtes jaotatud lõigu a pikema osa. Nüüd oleme võimelised konstrueerima nii kuldset ristkülikut (küljed on kuldses suhtes) kui ka kuldset kolmnurka (haar ja alus kuldses suhtes) ja uurima nende omadusi.

Teatavasti on kuldse kolmnurga tipunurk 36^0. See fakt lubab ennast kasutada korrapärase kümme- ja viisnurga konstrueerimisel (vt joon 5.). Kõike seda võiks vähemalt matemaatika laia kursuse raames uurida ja dünaamiliste slaidide abil illustreerida.

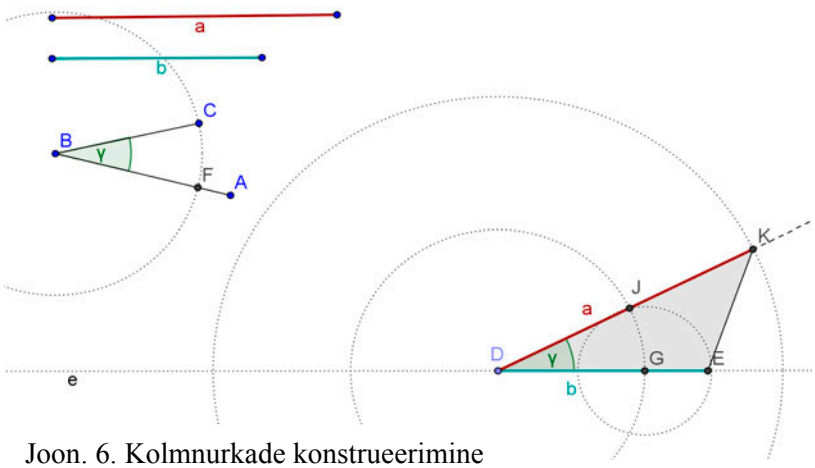
Loomulikult leidub gümnaasiumi matemaatika erinevate mittegeomeetriliste teemade tarvis huvitavaid geomeetrilisi illustratsioone veel külluses. Kindlasti lasevad ennast geomeetriliselt näitlikustada sellised teemad nagu piiväärtus, geomeetriline ja aritmeetiline progressioon, trigonomeetria, tuletis ja selle rakendused jt. Järgnevas piirdume aga vaid n-ö puhtgeomeetriliste teemadega.

Tasandigeomeetria teemad

Gümnaasiumi kitsas ja lai matemaatika käsitlevad otseselt tasandigeomeetria küsimusi trigonomeetria kursuses ja kursustes „Tasandilised kujundid. Integraal“ (kitsas matemaatika) ning „Integraal. Planimeetria kordamine“. Trigonomeetria kursuses vaadeldakse kolmnurga

pindala valemeid ja siinus- ning koosinusteoreemi. Kõik omandatu rakendub suvalise kolmnurga lahendamisel. Enne nende teemade juurde asumist oleks otstarbekas korrata varasemates klassides kolmnurgaga seonduvalt õpitut. Alustada võiks näiteks **kolmnurga konstrueerimisülesannetest ja neist tulenevatest kolmnurkade võrdsustunnustest**. Siin saab GeoGebra baasil luua väga häid õpitu kordamist toetavaid dünaamilisi slaide. Koostame näitena slaidi, mille abil saab demonstreerida kolmnurga konstrueerimist kahe külje ja nendevahelise nurga järgi. Toimime selleks järgmiselt.

- Anname ekraani üleval vasakus nurgas ette kolmnurga küljed a,b ja nurga y(vt joon 6).
- Asetame ekraanile sirge *e*, millele paigutame konstrueeritava kolmnurga ühe külje (näiteks *b*). Kasutame selleks menüü valikut *Sirkel.*
- Konstrueerime nurgaga γ võrdse nurga nii, et selle tipp asuks punktis *D* ja üks haaradest oleks sirgel *e.* Leiame selleks ringjoone *B*(*BC*) (keskpunkt punktis *B*, raadisus *BC*) ja lõigu *BA* lõikepunkti *F.* Joonestame seejärel ringjoone *D*(*BC*) ja leiame selle ringjoone ning lõigu *DE* lõikepunki *G.* Edasi joonestame ringjoone *G*(*FC*) ja leiame saadud ringjoone ning ringjoone *D*(*BC*) lõikepunkti *J*. Joonestades nüüd veel kiire *DJ* ja olemegi saanud soovitud omadustega nurga. Sama nurga saame konstrueerida ka menüü valikuga *Etteantud suurusega nurk*, kui sisestame dialoogiaknasse nurgaks γ. Viimati pakutud konstruktsiooni lihtsam variant pole aga alati metoodiliselt soovitatav, sest sellisel juhul on õpilasel slaidilt raskem leida tingimusi, mida peavad rahuldama algandmed, et vastav ülesanne oleks lahenduv.
- Kasutades menüü valikut *Sirkel* joonestame ringjoone *D*(*a*) ja leiame selle ning kiire *DJ* lõikepunkti *K*. Nii kandsime kolmnurga külje *a* kiirele *DJ*.
- Lõpuks konstrueerime soovitud kolmnurga *DEK* ning peidame ülearused joonelemendid ja tähised.



Joon. 6. Kolmnurkade konstrueerimine

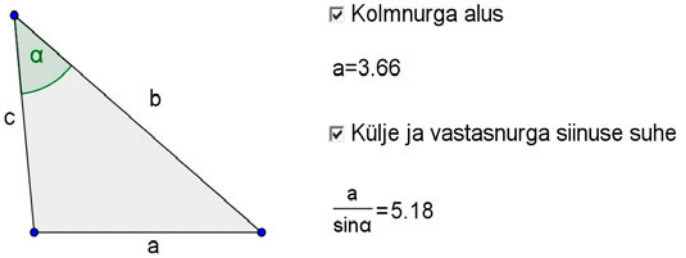
Saadud slaidi abil saame uurida, kuidas muutub kolmnurk, kui muudame selle lähteandmeid. Selleks tuleb vaid lähteandmeid hiirega lohistada. Selgub, et kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk

määravad alati vaid ühe kolmnurga. Seega kõik kolmnurgad, millel on need vastavad elemendid võrdsed, on ka võrdsed. Samuti võimaldab slaid leida tingimused, milliste lähteandmete puhul on kolmnurk määratud. Vaadeldava näite puhul on ainsaks selliseks tingimuseks võrratus $\gamma < 180^0$.

Ülaltooduga analoogiliselt saab koostada slaidid ka kolmnurkade teiste võrdsustunnuste tarvis. Tunnuse KKK selliselt koostatud slaidi abil saab väga ilmekalt demonstreerida kolmnurga võrratust. Samas, tehes slaidi, millel lähteandmeteks on kolmnurga kaks külge ja neist ühe vastas olev nurk, saame õpilastele näidata juhtu, kus etteantud kolm elementi määravad kaks erinevat kolmnurka (antud nurk on lühema külje vastas). See oleks kindlasti vajalik eeltöö kolmnurga lahendamisele siinusteoreemiga.

Ka teised varasemates klasside omandatud geomeetriaalased teadmised võiks õpilastega korrata mitte passiivses loengulises, vaid aktiivses uurimuslikus vormis dünaamiliste slaidide abil. Mitmeid sobivaid selliseid slaide **kolmnurga, rööpküliku ja trapetsi omaduste ja pindala** kordavaks uurimiseks leiab veebilehelt http://matdid.edu.ee.

Siinusteoreemi käsitlemiseks pakub matemaatikaõpetaja K. Orason välja suhteliselt lihtsa dünaamilise slaidi /12/. Sellel slaidil on vaba tippudest lohistatav kolmnurk. Slaid on varustatud märkeruutudega avatavate tekstidega. Viimaste abil saame ekraanile tuua kolmnurga külgede pikkused, nurkade ning nende siinuste ja samuti suhete $\frac{a}{\sin\alpha}; \frac{b}{\sin\beta}$ ning $\frac{c}{\sin\gamma}$ väärtused. Sellise slaidi abil on võimalik luua õpilastele õpisituatsioon, kus nad ise leiavad otsitava seose. Slaidiga töötades võiksid õpilased vähemalt ühe korra otsitavad suhted kalkulaatori abil arvutada. Seejärel võiks õpetaja õiget vastust ekraanil demonstreerida. Edasi jätaksime aga kõik arvutused juba GeoGebra sooritada ja tunneksime huvi vaid selle vastu, mis on see invariant, mis erinevate kolmnurkade puhul neid suhteid iseloomustab. Sama slaid on sobiv kasutamiseks ka siinusteoreemi rakendavate ülesannete generaatorina.



Joon. 7. Dünaamiline tekst ekraanil

Selliste slaidide koostamisel võib õpetajale osutuda probleemiks **märkeruudu ja arvutustest lähtuva dünaamilise teksti esitamine ekraanil**. Märkeruudu lisamiseks *juba olemaolevale*

tekstile või konstruktsioonielemendile kasutame menüü valikut *Märkeruut objektide näitamiseks ja peitmiseks,* täites vastava valiku järel sobivalt dialoogiaknas nõutud väljad. Pisut keerukam on joonisega seotud dünaamilise teksti esitamine ekraanil. Olgu meil näiteks ekraanil tarvis esitada kolmnurga aluse *a* pikkust dünaamiliselt näitav tekst (vt joon 7.). Vastav tekst tekstikastis tuleks sellisel juhul vormistada järgmiselt: " a =" + a + "". Ekraanil näeksime sellisel juhul järgmist teksti: „a = külje a konkreetne dünaamiliselt muutuv arvuline väärtus“.

Kui aga soovime ekraanil näha teksti: „$\frac{a}{\sin\alpha}$ = suhte konkreetne dünaamiliselt muutuv arvuline väärtus“, siis peaksime teksti sisestama järgmisel kujul " \frac{ a }{ sinα} =" + (a / sin(α)) + "". Selle teksti esimese osa sisestamisel varustame tekstiaknas linnukesega valiku *LaTeX`i avaldis*.

Kasutades sama tehnikat ja ideestikku, võime koostada slaidid ka koosinusteoreemi käsitlemiseks. Sellised slaidid on edukalt rakendatavad ka konkreetsete õpikuülesannete illustreerimisel.

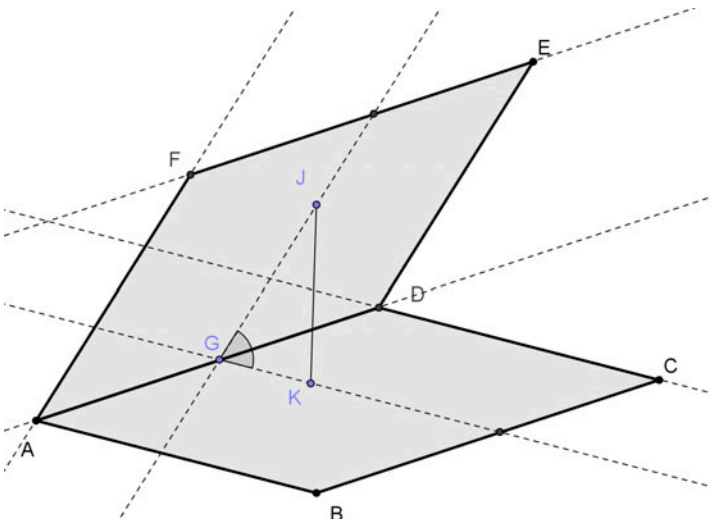
Ruumigeomeetria teemad

Artikli alguses dünaamilistele slaididele esitatud vormistuslikud nõuded soovitasid vältida kolmedimensionaalseid jooniseid. Neid olevat on raske jälgida. Kuna gümnaasiumis käsitletava sünteetilise geomeetria kursuse üheks eesmärgiks ongi aga just ruumiliste kujundite tasandilise kujutiste loomine ja viimaste mõistmine, siis peame seda nõuet ilmselt ignoreerima. Hulgaliselt huvitavaid sünteetilist geomeetriat illustreerivaid slaide leiame J. Albre materjalidest /2;3/. Neid slaide või nende analooge on suhteliselt lihtne koostada õpetajal endal.

Vaatleme järgnevas **kahetahulist nurka demonstreeriva dünaamilise slaidi** konstrueerimist. See on ruumigeomeetria üheks lihtsamini valmistatavaks ja edasiarendatavaks dünaamiliseks slaidiks. Konstruktsiooni alustame vaba rööpküliku *ABCD* valmistamisest (vt joon 8.). Selleks läbime järgmised konstruktsiooni etapid.

- Joonestame esmalt vaba lõigu *AB*.
- Valime vaba punkt *C* ning joonestame lõigu *BC*.
- Joonestame punktidest *C* ja *A* paralleelid vastavalt lõikudele *AB* ja *BC* ning leiame nende sirgete lõikepunkti *D*.

Valides vaba punkti *E,* joonestame analoogiliselt ka rööpküliku *ADEF*. Seejärel valime lõigul *AD* vaba punkti *G* ning joonestame sealt paralleelid lõikudele *DE* ja *DC*. Joonise disainimisel



Joon. 8. Kahetahuline nurk

peidame ülearused sirged (punktiiris olevad) ja tähed ning joonestame lõikudena joonnurga *G* haarad. Rõhutamaks fakti, et joonnurga haarad on risti kahetahulise nurga servaga, võime joonisele lisada veel vastavad täisnurkade tähised. Selleks võib kasutada menüü valikuid *Nurk* (tähist ei näita) ja *Punkt*.

Saadud slaid on kasutatav nii kahetahulise nurga kui ka tasanditevahelise nurga mõiste illustreerimisel. Viimase puhul tuleb aga arvestada sellega, et see nurk ei saa olla suurem kui 90^0 . Seega, soovides saadud slaidist teha slaidi tasanditevahelise nurga illustreerimiseks, peame konstruktsiooni lisama tingimuse, mis tagab selle, et joonisel oleks alati nähtav vaid terav- või siis täisnurk. Selleks annab võimaluse kohtmenüü valik *Lisavõimalused* (*Tingimused, millal näidata objekti*). Sama slaidi saame täiendada veel selliselt, et see on kasutatav ka mitmete tasanditevahelise nurgaga seotud ülesannete lahendamisel. Selleks tuleks joonnurga haaradele lisada vaid vabad punktid *J* ja *K* nii, et need koos punktiga *G* moodustaksid perspektiivis täisnurkse kolmnurgana paistva kolmnurga.

Korrektsete ruumiliste kehade jooniste valmistamine tahvlil on sageli üsna aeganõudev töö. Väga hea, kui õpetajal on selleks puhuks kasutada dünaamilised slaidid. Loomulikult ei tähenda see seda, et joonise tekkimist tavatahvlil ei tulekski demonstreerida. Esimesed kehade joonised peaksid kindlasti tekkima just koostöös: õpetaja tavatahvlil, õpilased – vihikus. Vaid hiljem võime siin kasutama hakata tehnilist tuge. Ka siis olgu esimeseks sammuks dünaamiline slaid, kus konstruktsioonisammude navigeerimisriba abil näidatakse joonise kujunemist ja seda just selles järjekorras, nagu see tekib joonestamisel vihikusse. Seejuures peab aga silmas pidama, et joonise tekkimise demonstreerimisel ei kiirustataks. Õpilastele tuleb anda aega uute joonise elementide tekkimise jälgimiseks. Eriti kehtib öeldu juba olemasoleva joonise asendi või kuju muutmise kohta. Kui õpilane ei suuda jälgida ja fikseerida vastavaid muutusi, siis kaotab kasutatav dünaamika täielikult oma mõtte.

Vaatleme viimase näitena **korrapärast kuusnurkset prismat kujutava dünaamilise slaidi** koostamist. Siin kasutatavat ideestikku saab õpetaja rakendada ka teiste ruumiliste kehade dünaamiliste jooniste valmistamisel.

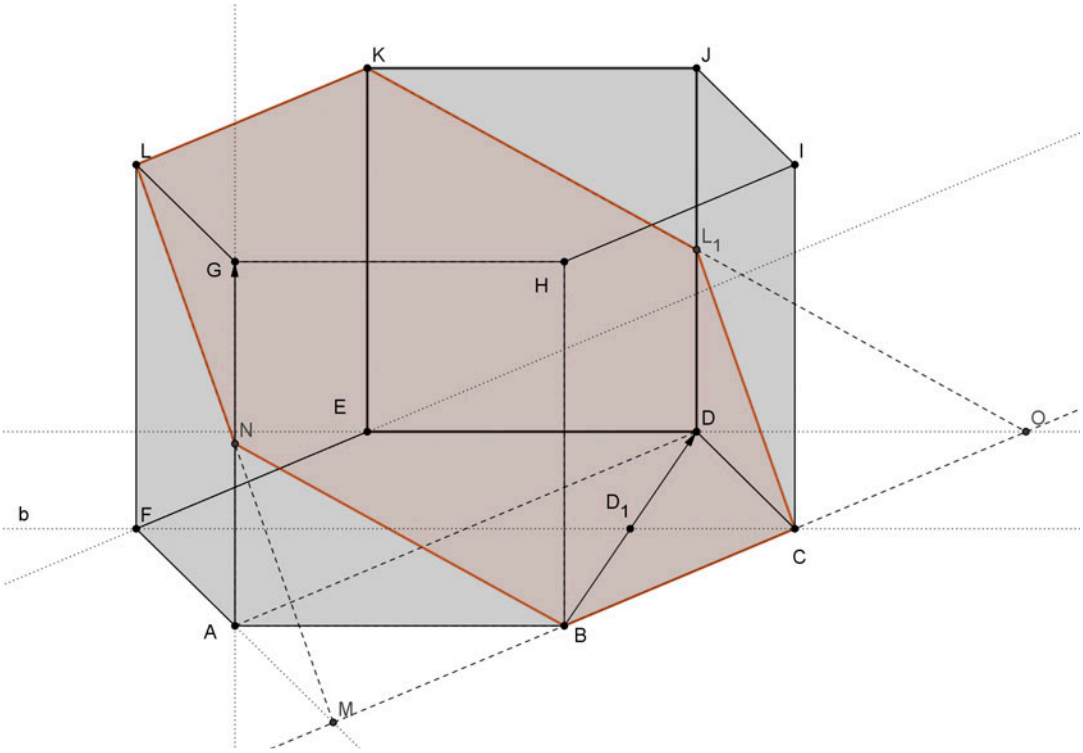
Nii nagu tahvlijoonise puhul, alustame ka nüüd konstruktsiooni põhja joonestamisest. Et tegemist on korrapärase kuusnurgaga, siis tuleb meil joonise valmistamisel arvestada kindlasti mitmete faktidega.

- Kuusnurga vastasküljed paistavad meile paralleelsete ja võrdsetena.
- Kuusnurga diagonaalid lõikuvad ühes punktis. See punkt paistab meile asuvana kuusnurga vastaskülgedega määratud riba poolitaval sirgel. Sellel poolitaval sirgel näeme me ka kahte kuusnurga tippu.

Kirjeldatud omadustega kuusnurga konstrueerimisel läbime järgmised sammud (vt joon 9.).

- Joonestame vaba lõigu *AB* ja valime ülevalpool seda vaba punkti *D* .
- Leiame lõigu *BD* keskpunkti D_1 ja joonestame punktidest *D* ja D_1 paralleelid lõigule *AB*. Nii oleme saanud soovitud riba ja seda poolitava sirge *b*.
- Kasutades lüket vektoriga $\overrightarrow{BD}$ joonestame lõiguga *AB* paralleelse ja võrdse lõigu *ED.*
- Valime sirgel *b* punkti *C* selliselt, et *BC* oleks paralleelne kuusnurga diagonaaliga *AD* (paralleelsed sirged paistavad ka perspektiivis paralleelsetena). Joonestame seejärel lõigu *FE* paralleelselt lõiguga BC. Lõpuks konstrueerime kuusnurga *ABCDEF*.

Joonist jätkame selliselt, et prisma kõik külgservad jääksid paistma kõige esimese



Joon. 9. Korrapärane kuusnurkne prisma

põhiservaga risti olevatena.

- Konstrueerime punktist *A* ristsirge lõigule *AB* ja valime sellel vaba punkti *G*.

- Kasutades lüket vektoriga $\overrightarrow{AG}$ joonestame prisma ülemise põhja ja konstrueerime prisma külgtahud.

Pärast joonise disainimist oleme saanud tippudest *A, B, D* ja *G* muudetava kuusnurkse prisma. Nendest tippudest joonist sobivalt lohistades võime esitada piisavalt tõepäraseid pilte selle prisma erinevatest asenditest ruumis. Samas saame seda slaidi ka edasi arendada. Joonisel 9 on näiteks esitatud selle prisma lõige tasandiga, mis läbib prisma põhjade servi *BC* ja *KL*. Seejuures tuleks arvestada järgmiste tõsiasjadega:

- prismat lõikava tasandi sirged *JN* ja *BC* lõikuvad põhitasandi sirgel *AF* (punkt *M*);
- prismat lõikava tasandi sirged KL_1 ja *BC* lõikuvad põhitasandi sirgel *DE* (punkt *O*).

Pakutuga analoogiliselt saame koostada slaide erinevate prismade ja ka püramiidide tarvis. GeoGebra menüü valik *Ellips* laseb konstrueerida ka slaide pöördkehade tarvis. On loomulik, et õpetajal puuduvad selliste slaidide tipptasemel koostamiseks vajalikud teadmised projektiivsest geomeetriast. See aga ei tohiks siiski olla takistuseks slaidide koostamisel. Kui arvestame olulisemaid perspektiivis säilivaid seoseid kujutatava objekti elementide vahel, siis saame ka piisavalt hea joonise. Mis kõige tähtsam, neid jooniseid saame me alati kiiresti muuta selliseks, et nad paistavad meile loomutruudena.

Kirjandus.

1. Albre,J. Jane Albre dünaamilised slaidid. URL: http://mott.edu.ee/component/option,com_remository/Itemid,28/func,select/id,89/

2. Albre, J. (2008). Dünaamilised slaidid 12. klassi matemaatikaõpiku juurde. Magistritöö. Tartu, URL: http://dspace.utlib.ee/dspace/bitstream/handle/10062/6625/albre_jane.pdf

3. Albre, J. Dünaamilised slaidid matemaatika visualiseerimiseks. URL: http://www.elvag.edu.ee/~pihlap/D:/CD_Dynaamilised_slaidid/CD/Tiitelleht.htm
4. Jair, A., Lepmann, T. (2005). Kolmnurga tähtsamate joonelementide lõikepunktiga määratud lookused kui huvitav uurimisobjekt õpilastele. *Koolimatemaatika XXXII*, Tartu: TÜ kirjastus, 60–63.
5. Jukk, H., Lepmann, T. (2005). Dynamic geometry as an opportunity for developing the cognitive abilities of students. VI international conference „Teaching mathematics: retrospective and perspectives“. Proceedings. May 13–14, Vilnius: University of Vilnius, 120–124.
6. Lepmann, T. (2004). Tegevusele orienteeritud geomeetriaõpetusest. Matemaatika õpetamisest koolis. Tallinn: Argo, 118–125.

7. Lepmann, T. (2008). О возможности использования геометрического пакета GeoGebra в программе школьной математики. IX international conference „Teaching mathematics: retrospective and perspectives“. Proceedings. May 16–17, Vilnius: Pedagogical University, 48–53.
8. Lepmann, T., J. Albre. (2008). Programmi GeoGebra kasutamisvõimalusi geomeetria õpetamisel. *Koolimatemaatika XXXV*. Tartu: TÜ kirjastus, 52–58.
9. Lepmann, T. (2010). Dünaamilise geomeetria slaidide koostamine. Matemaatika. Valdkonna raamat põhikooliõpetajale. Tallinn, URL: http://www.oppekava.ee/index.php/P%C3%B5hikooli_valdkonnaraamat_MATEMAATIKA
10. Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2011). Matemaatika 10. klassile. Tallinn. Koolibri.
11. Marandi, T. Õppematerjalide koostamine. 2007. URL: http://lepo.it.da.ut.ee/~triinm/Marvi_talvekool_2007jaanuar_kasileht.pdf
12. Orason, K (2011). Dünaamilised slaidid trigonomeetrias. Magistriõppe lõputöö. Tartu, URL: http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=228:duenaamilised-slaidid-trigonomeetrias&catid=189:tehniliste-vahendite-kasutamine-naeitlikustamine&Itemid=221
13. Sild, S. Geogebra abimaterjalid. URL: http://mott.edu.ee/component/option,com_remository/Itemid,28/func,startdown/id,227/
14. Tšepurko. E. Ruutfuktsiooni graafik. URL: http://mott.edu.ee/component/option,com_remository/Itemid,28/func,startdown/id,192/
15. Vaard, E. Multimeedia kasutamise võimalusi põhikooli matemaatikas teema „Koordinaattasand“ näitel 2004. Magistritöö. Tallinn, URL: http://www.cs.tlu.ee/osakond/opilaste_tood/magistri_tood/2004_sugis/Eha_Vaard/Eha_Vaard_Mag_Too.pdf