Trigonomeetria gümnaasiumis

Hannes Jukk, Tartu Ülikool

Trigonomeetria võib meile tähendada kahte pisut erinevat matemaatikavaldkonda. Ajalooliselt on see tähendanud esmalt kolmnurkade mõõtmise ja lahendamisega seonduvat ning on seega üks haru tasandigeomeetriast (planimeetriast). Sellest aspektist vaadeldes on trigonomeetriale aluse pannud Kreeka matemaatik Eukleides (u 300 eKr), kes kirjutas raamatu „Elements", ja Kreeka astronoom Hipparchust (u 180 – u 125 eKr), kes koostas tabeli, milles kirjeldas ringis moodustuvate kõõlude ja kaarte väärtusi erinevate kesknurkade korral. Teine tunnetus trigonomeetriast tekib meil gümnaasiumis, kus tegeletakse enam trigonomeetriliste funktsioonidega ning nende omadustega. Alates prantsuse matemaatik Albert Girardist 16. sajandil tähistatakse trigonomeetrilisi funktsioone lühenditega sin, cos ja tan.

Selleks et rääkida, mis juhtub gümnaasiumis, peame esmalt välja selgitama meie õpilaste eelteadmised. Põhikooli õppekava (2011) õpitulemustes on trigonomeetria mõistet kasutamata öeldud: „Õpilane leiab täisnurkse kolmnurga joonelemendid". See nn täisnurkse kolmnurga lahendamine tähendab seda, et antud kahe kolmnurga joonelemendi (nurga ja/või külje) korral leiab õpilane teised neli puuduvat joonelementi. Õppesisust näeme, et õpilasel on kolmnurga joonelementide leidmise vahenditeks teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid ja Pythagorase teoreem. Seega, võrreldes varem kehtinud põhikooli ja gümnaasiumi riikliku õppekavaga (2002), ei õpita põhikoolis kehtiva õppekava kohaselt enam trigonomeetriliste funktsioonide vahelisi põhiseoseid.

Matemaatika ainevaldkonna õpetamine gümnaasiumis toimub vastavalt 2011. aastal vastu võetud õppekavale kahes harus: kitsas matemaatika (KM), mis koosneb 8 kursusest ning lai matemaatika (LM), mis koosneb 14 kursusest. Kitsas matemaatikas seonduvad trigonomeetriaga kaks kursust: II kursus „Trigonomeetria" ning V kursus „Funktsioonid I". Alustatakse nurga mõiste üldistamisest ja erinevatest nurga mõõtühikutest ning jõutakse trigonomeetrilise funktsiooni üldistamiseni. Lisaks on mõned enam kasutatud trigonomeetriavalemid ehk põhiseosed trigonomeetriliste funktsioonide vahel. Seal on kolmnurga pindala valemid ja kolmnurga lahendamine, kasutades siinus- ja koosinusteoreemi; ringjoone kaare pikkuse ja sektori pindala arvutamine, kus võib vaja minna nurga ühikute teisendamist radiaanmõõdust kraadimõõtu ja vastupidi. Viiendas kursuses „Funktsioonid I"

on märgitud õpitulemustes, et õpilane lahendab graafiku abil trigonomeetrilisi põhivõrrandeid. See lauseke tähendab, et õpilased uurivad põgusalt trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid, mida pole aga selgelt märgitud ei õpitulemustes ega ka õppesisus. Kui tekstis on märgitud mõisted *arcsin m*, *arccos m* ja *arctan m*, siis see tähendab, et tuleks põgusalt rääkida ka vastavatest funktsioonidest ja graafikutest. Kursuses „Funktsioonid II" on märge, et peab oskama leida õpitud funktsioonide tuletisi.

Seega kitsas kursus on õhem varasemast selle poolest, et vähendatud on trigonomeetriliste teisenduste osakaalu ning peab oskama lahendada vaid põhivõrrandeid. Õpilased peavad saama trigonomeetriliste funktsioonide graafikute uurimise käigus aimu nende funktsioonide perioodilisusest, mis annab võtme põhivõrrandite graafiliseks lahendamiseks. Lisaks oleks õpilasel hea teada, et siinus ja tangens on paaritud funktsioonid ning koosinus on paarisfunktsioon. Vastasel juhul võib paljudele õpilastele jääda ekslik aimdus, et paarisfunktsioonil peab olema paarisarvuline astendaja (nt $y=x^{2n}$), mis on piiratud lähenemine.

Mis tahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid (siinus, koosinus, tangens), nende väärtused nurkade 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360° korral (KM, II kursus). Kuna esimese veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi ei pea põhikoolis tuletama ega ka pähe õppima, siis tehakse seda gümnaasiumis. I veerandi nurkade puhul on kaks võimalust.

1. Praktiline töö. Joonestada millimeetripaberile kaar 90° raadiusega 100 mm. Jaotada see kaar malli abil üheksaks võrdseks osaks. Jaotised järgnevad siis üksteisele kaareks iga 10° tagant. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad 10°, 20°, 30°, …, 80°. … (vt T. Tõnso, A. Veelmaa. Matemaatika X klassile. Mathema, lk 202, ül 701).
2. Tõestatakse Pythagorase teoreemi kasutades (vt IX klassi matemaatika õpikutes).

Mõlemal lähenemisel on omad eelised. Esimesel juhul on tarvis kasutada erinevaid joonestamise ja mõõtmise vahendeid. Malli kasutamist on ülesannetes õige harva vaja, nagu ka sirklit. Kui seda teha veel rühmades (vähemalt 6 õpilast rühmas), siis on võimalik rääkida mõõtmise täpsusest, pliiatsi teravusest, mõõtude võtmisest, vea arvutamisest, võib-olla arvutada aritmeetilised keskmised. Siinkohal võivad erinevad rühmad teha kaare erineva raadiusega. Sellel võiks olla vähemalt kaks väärtust: näha, et suuremalt jooniselt on võimalik saada suurem täpsus; raadiusest olenemata saab teha samad järeldused. Jooniste tegemine on matemaatika eluline rakendamine. Kiire ja räpakas töö siin kuidagi ei sobi. Teisel juhul (mis

võiks sobida ka kitsa matemaatika kursuses) võiks ühe tõestuse teha koos ning ülejäänutele anda ette joonised, mille järgi saab tulemusi põhjendada sarnasel kombel.

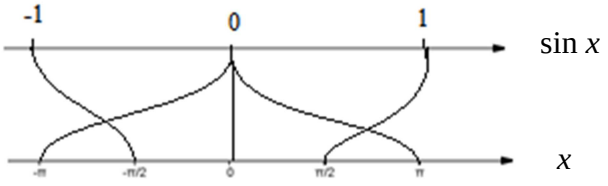
Õppekava lugemisel saab seda tõlgendada nii, et matemaatika kitsas kursuses ei õpita taandamisvalemeid. Kuid eespool märgitud nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi peab teadma. Need jäävad üpris hõlpsasti meelde. Siinkohal võiks meenutada vana nippi:

Funktsioon	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	–1
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	–1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$	-	0	-

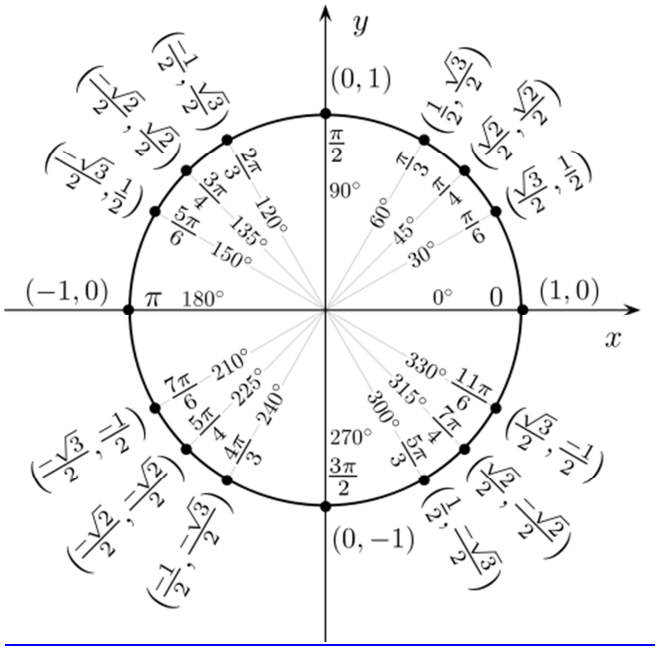
On vaja meelde jätta tabeli esimene rida. Funktsiooni graafikut kõrvale võttes (sic! On alles KM V kursuses) veendutakse ja jäetakse meelde, et siinus on esimese veerandi nurkade korral kasvav funktsioon. Esimese veerandi nurkade koosinused saadakse, teades siinuseid (nurga siinus on võrdne täiendusnurga koosinusega). Tangens saadakse siinuse ja koosinuse jagatisena.

Kui õpitakse taandamisvalemeid (LM IV kursus), siis on märkide meeldejätmiseks mitu võimalust. Üks on see, kus iga trigonomeetrilise funktsiooni juurde on joonistatud koordinaattelgede abil 2 korda 2 risttabel, kus igas veerandis on näidatud trigonomeetrilise funktsiooni märk. Teine võimalus on meelde jätta reegel sõnaliselt: nurga siinuse märk on sama, mis on nurga lõpphaaral oleva suvalise punkti *y*-koordinaadil (koosinuse märk on sama, mis *x*-koordinaadil ning tangensi märk sama, mis *x*·*y*-*i* märk). Lisaksin siia veel, et aitab see, kui osatakse joonistada ja lugeda funktsioonide graafikuid (mõne lühitöö või tunnikontrolli lahendamise ajal võiks lubada jooniseid kasutada). Selgituseks kaks kena joonist, mis võivad märkide taandamisvalemite kasutamiseks vajalike märkide meeldejätmisel abiks olla.

Siinusfunktsioon



Ilus on need väärtused kanda ka ühikringile või kasutada sinusoidi konstrueerimisel ühikringjoont. Järgmisel Wikipediast pärit joonisel jälgitagu ühikringjoone ja nurga lõpphaarade lõikepunktide *x*- ja *y*-koordinaate – kuidas nad on seotud nurga siinuse ja koosinusega?



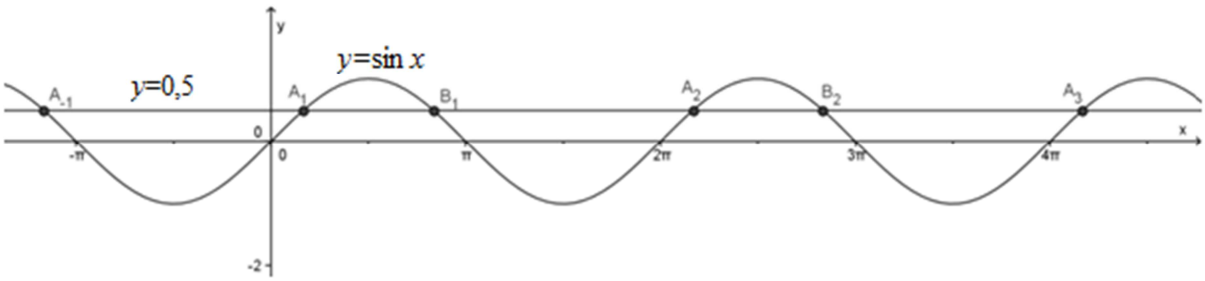
Joonis. Siinusfunktsiooni väärtused ühikringjoonel (http://en.wikipedia.org/wiki/Sine).

Miks eelmine tabel ja joonis vajalikud on? Miks peab üldse midagi pähe õppima? Siit saab väärtuslikke nurki, et oleks hea kontrollida, kas on hästi meeles erinevad trigonomeetria teisendusvalemid. Tänapäeval teevad palju asju meie eest ära arvutid ja kui ei tee, siis internetist või raamatutest leiab kiiresti õiged valemid ja tabelid kätte. Siiski on oluline oskus *debugimine*, see polegi päris meie sõna, aga programmeerijad kontrollivad oma programmi mingite andmete korral. LOGO-programmeerimise propageerija Seymour Papert ütles ligilähedaselt järgmist (S. Papert jt, 1993; Mindstorms, Basic Books, lk 144): „Oluline on näha, et programm on hea, kuigi seal võib olla mõni väike viga. Debugimise filosoofia seisneb selles, et õpilane saab oma vead ise likvideerida nii, et keegi teine ei saa isegi teada. See filosoofia jõuab õpilasteni läbi arvutiprogrammeerimise kõige efektiivsemalt”. Olgugi et mõnel juhul me teeme tehteid tähtavaldistega, siis oleks mõistlik paluda õpilastel kontrollida teisendamisel saadud tulemust, andes muutujatele arvulisi väärtusi. Õpilastel on koolikotis kena taskuarvuti, mis teeks silmad ette mõnelegi paarkümmend aastat vanale personaalarvutile, kuid kasutada oskavad selle riistapuu võimalusi õige vähesed. Oma tegevuse kontrollimine on jällegi see, millega peab tegelema matemaatikatunnis. Õpilane saab

taskuarvuti abil kontrollida, kas tema töö on olnud edukas. On küll tüütu, aga sel kombel oleks isegi võimalik leida koht, kus uus avaldis ei ole enam eelmisega samaväärne. Sedasi oldaks sõber oma arvutiga ja tunne oleks kindlam tehtud töö suhtes. Ka teisendusvalemeid saab nõndamoodi üle kontrollida

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, kui $\alpha = 30^\circ$, siis $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja ka $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid, funktsioonide y = sin x, y=cos x, y = tan x graafikud. Siin tasuks taas muidugi kasutada erinevaid vahendeid, et tuumani jõuda. Esiteks: funktsioonide graafikuid peaks tegema millimeetripaberile, hoolimata kuluvast ajast. Vaja oleks konstrueerida enam kui ühe perioodi jagu. Jõudma peab selleni, et funktsiooni väärtused hakkava korduma. Teiseks: graafikuid on vaja uurida dünaamilise geomeetria vahendeid kasutades, eelistatult GeoGebra abil (vt töölehti nn *MottWiki*s või mujal). Siin tasuks vaadata põhjalikumalt näiteks siinusfunktsiooni: millised on nullkohad, milline on muutumispiirkond, millal on funktsioon positiivne, kus on negatiivne, mida tähendab perioodilisus. Kui abstsissteljel on ühikuks valitud radiaan, siis on perioodi pikkust küllalt lihtne jooniselt välja lugeda. Siin on hea selgitada ka trigonomeetriliste põhivõrrandite geomeetrilist lahendamist, kuigi see on hoopiski V kursuses „Funktsioonid I". Näiteks võrrandi sin *x* = 0,5 geomeetrilisel lahendamisel uuritakse jooniselt joonte *y* = sin *x* ja *y* = 0,5 lõikepunkte. Jälgime kahte eraldi seeriat lahendeid, joonisel on need tähistatud punktidega A_i ja B_i, kus $i \in \mathbf{Z}$. Tähega A on märgitud lõikepunktid, millal siinusfunktsioon on kasvamas, ja üks seeria lahendeid oleks seega $x_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, kus *n* on suvaline täisarv. Teine seeria lahendeid on seotud tähega B, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$. Kuna kasutatakse taskuarvutit, siis peab oskama kasutada ka kraadimõõtu. Sellisel kombel lahendite kirjutamine on väga loomulik, sest kasutatakse otseselt siinusfunktsiooni perioodilisust. Nii näidatakse üldist põhimõtet, kuidas võrrandeid graafiliselt lahendatakse. Graafiline lahendamine oleks hea ka sel põhjusel, et näidatakse, kuidas avaldab mõju võrduse teisendamine. Näiteks on alguses võrrand 2sin *x* = 1, millest saadakse sin *x* = 0,5. Hea oleks lahendada mõlemaid võrrandeid samal joonisel kõrvuti, siis uurida ja näha, et lõikepunktide abstsisskoordinaadid on ühed ja samad.



Graafilist lahendamist saab hiljem kasutada ka selliste võrrandite lahendamiseks, mis ehk ei kuulugi kitsasse matemaatikasse, näiteks $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$. Siin on probleemiks see, et nimetajas olev avaldis ei tohi olla null. Seega $\sin 2x = 0$ lahendamisel saadud lahendid tuleb läbi kontrollida ja vajadusel esialgsed võrrandile sobimatud lahendid kõrvale visata. Võõrlahendite kõrvaldamiseks on kaks teed: kasutada ühikringjoont (viis trigonomeetrilise võrrandi kontrollimiseks), millele kantakse peale võrrandi lahendid ja nimetaja nullkohad, või – kasutades joonist, millele on kantud funktsioonide y=sin $2x$ ja y=sin x – ning siis sealt leida sobilikud lahendid ja sobiv perioodi pikkus. Kitsa kursuse puhul, kus taandamisvalemeid ei õpita, saabki trigonomeetrilisi põhivõrrandeid ainult graafiliselt lahendada, muidu erinevaid lahendiseeriaid kätte ei saaks.

Põhivõrrandite geomeetriliselt lahendamine on väga lähedane n-ö võrdlemise võttele. Olgu meil lahendada eelpool märgitud võrrand sin x = 0,5. Taskuarvuti ekraanilt saab hõlpsalt ühe lahendi (sama teevad ka nt programmid Wiris ja StudyWorks). Programm Wiris (www.wiris.ee) annab teada trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel seeriate esindajad, aga mitte üldlahendit. Siinuse taandamisvalemitest järeldub võrdus $\sin 30^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$. Olles uurinud siinusfunktsiooni graafikut, siis funktsiooni perioodilisuse tõttu $\sin(30^\circ + n \cdot 360^\circ) = 0{,}5$ ja $\sin(150^\circ + n \cdot 360^\circ) = 0{,}5$. Seega on meil kaks seeriat lahendeid $x_1 = 30^\circ + n360^\circ$ ja $x_2 = 150^\circ + n360^\circ$, kus n on täisarv. Aastal 2002 oli riigieksamil (I variant II osa ül 7) ülesanne cos $2x$ = cos x, mille võime lahendada analoogselt eelneva näitega. Siin arvestame taas perioodilisust ning seda, et cos x = cos (–x). Seega saame lahendite seeriad $2x = x + n360^\circ$ või $2x = -x + n360^\circ$. Kust saame avaldada $x = n \cdot 360^\circ$ või $x = n \cdot 120^\circ$, kus n on täisarv. Võib muidugi edasi minna ja esimesest lahendite seeriast loobuda, sest see sisaldub teises.

Taandamisvalemid matemaatika laias kursuses. On muidugi täpne esitada taandamisvalemite juures 5·4=20 valemit (kui kootangensid ka mängus, ehkki neid ei peaks käsitlema) või veelgi

enam. Kuid saab ka teisiti. Funktsioonid siinus ja koosinus ning tangens ja kootangens moodustavad kaasfunktsioonide paarid. Ütleme, et üks paarilistest on funktsioon tri *x* ja teine on tema kaasfunktsioon *co*tri *x*. Sel juhul taandamisvalemid võivad olla kas ainult *x*-telje suhtes näiteks $\sin(\pi - x) = \sin x$ või võetakse arvesse ka *y*-telg, siis näiteks $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. Nüüd võime esitada kahed taandamisvalemid:

- $\mathrm{tri}(n\pi \pm x) = \oplus \mathrm{tri}\, x$ – siin märk $\oplus$ on kas + või – sõltuvalt, millise märgiga on funktsioon tri *x* veerandis, kuhu kuulub nurk $n\pi \pm x$ (tavaliselt n=0,…,2), funktsioon jääb samaks;
- $\mathrm{tri}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm x\right) = \oplus \mathit{co}\mathrm{tri}\, x$ – siin märk $\oplus$ on kas + või – sõltuvalt, millise märgiga on funktsioon tri *x* veerandis, kuhu kuulub nurk $\frac{(2n+1)\pi}{2} \pm x$ (tavaliselt n=0, 1), funktsioon asendub kaasfunktsiooniga.

Näited. Olgu siin nurk α teravnurk.

1) $\cos(270^\circ + \alpha)$. Koosinuse kaasfunktsiooniks on siinus. Tegemist IV veerandi nurgaga, kus *x*-koordinaat ja seega ka koosinus on positiivne, seega $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$.
2) $\cot(180^\circ + \alpha)$. Jääb kootangens. Tegemist III veerandi nurgaga, kus *y*- ja *x*-koordinaat on negatiivsed ning kootangens positiivne, seega $\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha$.

Laia matemaatika kursuses õpitakse veel lisaks nurkade summa ja vahe trigonomeetrilisi valemeid ning eelmistest lihtsalt tuletatavaid kahekordse nurga trigonomeetrilisi funktsioone. Õpilastele on soovitatav valemite meeldejätmisel kasutada kokkupakkimise metafoori. Nende valemite memoreerimisel alustame nüüd valest otsast – alustame järeldusest ehk kahekordse nurga trigonomeetrilistest funktsioonidest. Kuivõrd leidub rohkesti kahekordse nurga trigonomeetriliste funktsioonide omadusi kasutavaid ülesandeid ning, et need seosed on lihtsama kujuga kui nurkade summa trigonomeetrilised funktsioonidega seotud valemid, siis jäävad nad küllalt hästi meelde: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ja $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Eelmised kaks peavad olema kooskõlas nurkade summa valemiga, siit $\sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$ ja $\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$. Kui nüüd nurgad oleksid erinevad, siis $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ja

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Ja viimaks pole enam raske tuletada nurkade vahe siinust ja koosinust, arvestades, et $x - y = x + (-y)$. See nipp võib aidata eksamil või kontrolltöö kirjutamisel valemid meelde tuletada.

Paar ideed seoses siinus- ja koosinusteoreemiga. Meie õpikutes on nendele teoreemidele erinevaid tõestusi ja palju väärt materjali rakenduslike ülesannete näol. Tõestamisel on tähtis mõista, mis on antud ja mida on vaja näidata – eeldust ja väidet. See tuleb selgelt ja rahulikult välja tuua. Tõestamise protsess on mõneti sarnane kirjandi kirjutamisele etteantud teemal. Nüüd võib seda metafoori kasutada sel kombel, et edukatele õpilastele anda ette kirjandi kondikava ja lasta nad omasoodu asja kallale. Teistele õpilastele võib pakkuda vastupidist võimalust: mõelda, millised etapid tõestuses tehti, miks võis ja millele tuginedes sai liikuda tõestusega edasi. Siin on õpilase hool tõestus maha kirjutada ja taastada „kirjandi“ kondikava. Kolmas võimalus on olnud õpilastele huvitav – tõestusest antakse ette lõplik joonis, kuid tõestus ise on näiteks lausehaaval eraldi sedelitele lahti lõigatud (olen kasutanud paberigiljotiini). Töö nagu esimese klassi matemaatika õpikus, kus oli neli pilti ja need tuli loogiliselt järjestada. Soovitus on tõestada teisiti, kui seda tehakse õpikus, sest muidu kaob mõnedel õpilastel põnevus kohe. Laias kursuses oleks üheks võimaluseks dünaamilise geomeetria vahenditega loodud animeeritud tõestuse vaatamine ja selle põhjal tõestuse kirjapanemine. Aadressil http://www.usamts.org/Images/Side8.swf asub koosinusteoreemi tõestus-animatsioon. Esmalt tasub jälitada tõestuskonstruktsiooni etappe, neid vajadusel põhjendada. Sarnase konstruktsiooni võiks luua ka ise programmi GeoGebra abil. Järgmisena on vaja tähele panna, et tõestati erijuhul, kus kolmnurga nurgana vaadeldi teravnurka. Seega oleks vaja uurida ka juhtumit, kus nurk on nürinurk. Kas oleks ehk võimalik koostöös informaatikaõpetajaga teha selline fläsh-video? See oleks võimalus ainete integreerimiseks. (vt ka lehekülge *matdid.edu.ee* märksõnaks koosinusteoreem).

Kokkuvõtteks arvan, et trigonomeetrilised funktsioonid on olulised sel põhjusel, et saame näited perioodilistest funktsioonidest, millele on rakendusi näiteks füüsikas. Nad annavad võimaluse tegeleda algebraga ning pakuvad mitmeid võimalusi õppida tõestamist ja loogilist järeldamist.

Lõpetuseks üks rakenduslikku laadi ülesanne, mis on pärit artiklist „Is the curve of temperature variation a sine curve?”, B.M. Lando ja C.A. Lando. *The Mathematics Teacher*, Sept 1977, Köide 7, Nr. 6, lk 534–537 (tõlge on pisut kohandatud):

Trans-Alaska torujuhtme ehitajad kasutasid soojustusplaate, et hoida eelsoojendatud toornafta temperatuuri, kui toru asus külmunud pinnases. Soojustuse disainimisel tuli arvestada temperatuuri kõikumisega kogu aasta jooksul. Kui Alaska õhutemperatuurid läbi mitme aasta olid kogutud (kust saaks andmed?), siis selgus, et neid on hea lähendada siinusfunktsiooniga $f(x) = 37\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(x-101)\right)+25$, kus f on temperatuur Fahrenheitides, *x* on päevad alates aasta algusest. *Selgitage arvulisi konstante. Teisendage temperatuur Celsiuse süsteemi. Jmt*?