Ainetevahelise ja ainesisese lõimingu võimalusi matemaatikas

Anne Küüsmaa, Tallinna Prantsuse Lütseum

> Igas õppetunnis omandatakse vaid teadmiste killukesi, mis kuhjuvad pähe nagu segamini paisatud esemed varakambris: nad on seal olemas, aga raske on neid sealt leida.
>
> J. Käis

Ülevaade lõimingu lähtekohtadest

Matemaatika eesmärgiks on luua õpilasel terviklik ja süsteemne pilt aine olulisematest mõistetest, seostest, protseduuridest, meetoditest ja ideeedest. Teadmised iseeneses ei ole enam väärtus, oluline on nende rakendatavus (Lepmann, 2010).

Sisemine lõiming on õppijas endas loodud tervikpilt kõigest õpitust ning see ei ole väljastpoolt lõplikult kontrollitav.

Välimine lõiming on õppekava sisu teadlik korraldamine ja rakendamine eesmärgiga soodustada sisemist lõimingut. Õppekava, õppematerjalide ja õpetaja ülesandeks ongi luua eeldused tervikliku pildi saamiseks (Kuusk, 2008).

Vertikaalne ehk *ainesisene* lõiming toimub õpiaja jooksul klasse läbivalt ja aitab õpilasel saada õppeainest tervikliku ettekujutuse nii teoreetiliste teadmiste kui rakenduslike oskuste osas (Kuusk, 2008). Eeldused selleks loob ainekavas pakutud kursuste järjestus ning see realiseerub aine kontsentrilises ülesehituses. Iga uue käsitluse korral lisandub juba teadaolevale alati midagi uut. See tagab aine süstemaatilise kordamise ja siin on õpetaja ja õpikute roll väga suur, seda eelkõige just vajalike seoste loomisel (Lepmann, 2010). Vertikaalset lõimingut peetakse aga sageli nii enesestmõistetavaks, et tavaliselt sellest kui lõimingust ei räägitagi (Kuusk, 2008).

Horisontaalne lõiming võimaldab luua seoseid erinevate õppeainete mõistete, ideede ja põhiprintsiipide vahel, laiendades ja üldistades õppeprotsessis omandatavaid teadmisi, ning rakendada ühes aines õpitud teadmisi ja oskusi teistes valdkondades. See toimub reeglina klasside lõikes õppeaasta kestel ja eeldab õpetajate koostööd, sest seda üksi kavandada on praktiliselt võimatu. Üksikud õpetajad võivad küll püüda anda oma parima, kuid see, mida nad teha saavad, on suhteliselt piiratud. Horisontaalset lõimingut saab teostada mitmel erineval moel, valik sõltub eeskätt sellest, mida tahetakse lõiminguga saavutada.

Lõimingu võtmeks peaks olema pädevuste käsitlemine erinevate ainete kaudu. Pädevusi saab vaadelda kui lõimingutsentreid, mis koondavad enda ümber kõik õppeained (üldpädevused) või osa neist (valdkonnapädevused). Teine võimalus on üritada lõimida erinevate õppeainete sisu. Siin peaksid abiks olema ainekavad (Kuusk, 2008).

Lõimimise organiseerimise lihtsaim viis on, kui erinevate ainete õpetajad viitavad teemat käsitledes õpilaste varasematele või ka ees ootavatele kokkupuudetele selle teemaga teiste ainete õppimisel. Oluline on, et erinevate ainete õpetajad teaksid sama teema käsitluslaadi ja sügavust teistes ainetes ning oskaksid erisuste korral sellele tähelepanu juhtida. Konkreetsete lõimitavate mõistete ja teemade leidmiseks peab teadma erinevate ainete sisu ja selle järjestust klasside lõikes (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011). Lõimimise saavutamiseks on tulus vahend õpilaste ühisprojektid, uurimistööd, õppekäigud ja muu ühistegevus (Põhikooli riiklik õppekava, 2011).

Lõimitud õppimine aitab vähendada kattuvusi ainetes, vältida ühe ja sama teema sarnaseid käsitlusi ning üldistada õpitavat, kasutades mitmekesiseid seoseid ja vähendades erinevatest ainetundidest tingitud killustatust. Lõiming võiks suurendada õppija huvi õpitava vastu, lisades õpitavale reaalse elu konteksti, seostades õpitut tavaelu teadmiste ja kogemustega ning ületada kooli- ja tavaelu nõudmiste vastuolusid – õpilased mõistavad, et n-ö koolilahendus ei pruugi olla parim igapäevakontekstis ja vastupidi. Õpilasel peaks kujunema ühelt poolt arusaamine matemaatikast kui oma universaalse keele ja meetoditega teisi ainevaldkondi toetavast ja lõimivast baasteadusest ning teiselt poolt ettekujutus matemaatika rakendusvõimalustest ning tihedast seotusest ümbritseva maailmaga (Jaani, J., Aru, L., 2009).

Üheks põhiliseks lõimingut takistavaks teguriks on õpetajate teadmiste tase ja ulatus, sest ei ainekava koostajad ega õpetajad ei tunne enamasti piisavalt seda, mis jääb nende ainealast väljapoole. Teiseks takistavaks teguriks on kindlasti ajalise ressursi piiratus – enamikul õpetajatest pole piisavalt ühiselt töötamise aega. Kolmandaks lõimingut takistavaks teguriks võib pidada riiklikku ainekeskset hindamissüsteemi – tasemetööd ja riiklikud eksamid toimuvad ainete kaupa. Neljandaks takistavaks teguriks võib pidada õpetajate skeptitsismi muutuste suhtes. Kuid see, mis kehtis mineviku koolis, ei pruugi enam töötada. Teatud takistusi lõimingu kavandamiseks põhjustab ka riiklik õppekava: ainekavades on vähe viiteid lõimingule, puudub ühtne mõistete süsteem. Õpetajatel oleks märksa lihtsam, kui lõimimise võimalused oleksid juba riiklikus õppekavas ära näidatud (Kuusk, 2008).

Teised ained matemaatikas

Matemaatikaõpetuse lõimimisel on küllalt tavapärane, et uute mõistete, seoste ja protseduuride juurde minnakse teistest valdkondadest pärit probleemi abil. Ka seoste ja protseduuride õppimisel peaks olema lähtekohaks eluline vajadus nende järele. Teine sageli matemaatikaõpetuses kasutatav ainetevahelise lõimingu variant on matemaatikas õpitu rakendamine teistest ainetest pärit näidetel (Lepmann, 2010).

Järgnevas vaatleme mõningaid võimalusi teiste õppeainete lõimimiseks matemaatikaga teemade kaupa.

Arvuhulgad. Avaldised

Arvuhulkade käsitlemist tuleks kindlasti seostada matemaatika ajalooga (lõiming läbiva teemaga „*Kultuuriline identiteet"*). Toreda näitena on veebilehel http://matdid.edu.ee kättesaadaval õpetaja Helki Haavasalu koostatud esitlus „Arvu pii imeline elulugu".

Arvu 10 astmeid ja arvu standardkuju kasutatakse palju keemias ja füüsikas. Ainete integratsiooni huvides on vaja gümnaasiumis korrata arvu standardkuju koos mõningate standardkujul antud arvudega teostatavate korrutamis- ja jagamistehete näidetega.

Suurte ja väikeste arvude käsitlemisel on vajalik tähelepanu pöörata ühikute eesliidetele ja ühikute teisendamisele (hädavajalik keemias ja füüsikas).

Näide 1. *Ülesandeid suurtest ja väikestest arvudest*

1. Taskuteatmik „A ja O" annab universumi suuremõõtmelise struktuuri kohta järgmised andmed: elektronide arv universumis on 10^{80}, footonite arv universumis on 10^{89}. Mida on rohkem, kas elektrone või footoneid, ja kui mitu korda? Kuidas loetakse vastuseks saadud arvu (Leego, Vedler, R., Vedler, S., 2002)?

2. Laste entsüklopeedia ENEKE andmetel sisaldub maakoores (massiprotsentides): elavhõbedat $7\cdot10^{-6}$; hõbedat $1\cdot10^{-5}$; kulda $5\cdot10^{-7}$; joodi $3\cdot10^{-5}$; antimoni $4\cdot10^{-5}$; seleeni $6\cdot10^{-6}$; vismutit $2\cdot10^{-5}$; argooni $4\cdot10^{-6}$. Pane need protsendid kasvavasse järjekorda (Leego, Vedler, R., Vedler, S., 2002).

3. Arvutada, kui suur on liivakogus, mis sisaldab 1 mooli liivaterakesi, kui iga liivaterakese ruumala on 1 mm^3.

Viimase näite matemaatiline mõistmine ei ole õpilaste jaoks triviaalne. Siin on korraga kasutatud kolme erinevat matemaatilist oskust: suurte arvude ettekujutamist, ruumalaühikute teisendamist ning kümne astmetega tehete sooritamist.

Keemia arvutusülesannete lahendamisel osutub väga vajalikuks oskus omavahel korrutada või jagada kas positiivsete või negatiivsete astendajatega astmeid. Samas õpilased ei tunne piisavalt astmete omadusi, ei oska neid rakendada, ei oska arvu standardkujule viia. Näiteks puudub arusaamine, et vähendades kordajat 10 korda, peab 10 astet suurendama 10 korda, st astmenäitaja peab 1 võrra suurenema.

Võrrandid, võrratused ja võrrandisüsteemid

Kuna matemaatika ja füüsika kursuses õpitakse väga erinevaid valemeid, siis tuleb tihti teisendada valemeid sobivale kujule, et avaldada nendest muutuja.

Näide 2 *Lõiming füüsika valemitega* (Leego, Vedler, R., Vedler, S., 2002)

Valemi nimetus	***Valem***	***Avalda muutuja***
Kehade vaba langemine	$s = \frac{gt^2}{2}$	t
Võimsus	$P = \frac{F \cdot s}{t}$	$F,\ s,\ t$
Ühtlaselt kiirenev liikumine	$v = v_0 + at$	$v_0,\ a$
Kangiseadus	$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$	$F_1,\ a_1,\ F_2,\ a_2$
Läätse valem	$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$	$a,\ k,\ f$

Gümnaasiumis on sobivaks teemaks, mis võimaldab lõimingut erinevate õppeainetega, kolme muutujaga lineaarvõrrandisüsteem. Üks võimalus paremaks mõistmiseks ja funktsionaalse lugemisoskuse saavutamiseks on panna õpilased ise tekstülesandeid koostama. See võimaldab õpetada teabetekstide kasutamist, annab võimaluse projekti- ja rühmatööde läbiviimiseks ning lõiminguks teiste ainevaldkondade, üldpädevuste ja läbivate teemadega. Sedakaudu saaks toimuda ka matemaatika ja emakeele lõiming, mis realiseeruks eelkõige korrektses emakeelekasutuses matemaatiliste tekstide esitamisel (seda ka lahenduste vormistamisel). Õpilased on piisavalt fantaasiarikkad, et luua ülesandeid, mis on seotud ajaloo, muusika, kirjanduse, ühiskonnaõpetuse või mõne muu ainega.

Näide 3. *Õpilaste koostatud erinevate ainetega seotud tekstülesandeid*

Ühiskonnaõpetus: 2009. aasta oktoobris oli registreeritud töötute arv 80143. Kui suur oli registreeritud töötute arv jaanuaris, palju lisandus registreeritud töötuid maiks ning oktoobriks? Kui mai töötute arv oleks oktoobriks lisandunute arvu võrra vähenenud, siis oleks töötute arv oktoobris 48507. Kui maiks ning oktoobriks lisandunud töötute arv oleks vähenenud jaanuari töötute arvu võrra, oleks töötute arv 2519.

Kirjandus: Shakespeare on kirjutanud kokku 599 luuletust, sonetti ja näidendit. Sonette ja näidendeid kokku on 215 võrra vähem kui luuletusi. Kui näidendeid oleks 3 korda rohkem ning sonette 2 korda vähem, siis oleks Shakespeare loonud kokku 598 teost. Mitu luuletust, sonetti ning näidendit on Shakespeare kirjutanud?

Muusika: Wolfgang Amadeus Mozart on loonud kokku 81 ooperit, sümfooniat ja viiulisonaati. Tuntuimateks ooperiteks on Figaro pulm, Così fan tutte, Võluflööt ja Don Giovanni. Oopereid ja viiulisonaate on kokku 1 võrra vähem kui sümfooniaid ning oopereid ja sümfooniaid on kokku 33 teost rohkem kui viiulisonaate. Mitu ooperit, sümfooniat ja viiulisonaati on Mozart loonud?

Ajalugu: Rooma sõjavägi e leegion koosneb raskerelvastusega jalaväest, kergerelvastusega jalaväest ja ratsaväest. Kokku on sõjaväelasi 4500. Kõige rohkem on raskerelvastatud jalaväelasi, neid on kaks korda rohkem kui kergerelvastusega jalaväelasi ja ratsaväelasi kokku. Kergerelvastatud jalaväelasi on kokku neli korda rohkem kui ratsaväelasi. Kui palju on kokku jalaväelasi ja kui palju ratsanikke?

Ülesannete koostamise juures on oluline korrektse eesti keele ja viitamistehnika kasutamine. Silmas pidades seda, et uue õppekava kohaselt peab iga gümnasist koostama ja kaitsma stuudiumi jooksul uurimistöö, on teksti loomise harjutamine igati tänuväärne. Eriti tore, kui matemaatikatunniks valminu leiab tunnustamist mujalgi. Eduelamust on õpilastele pakkunud osalemine erinevatel Tiigrihüppe poolt korraldatud võistlustel.

Näide 4. *Arvutialgebra programmiga WIRIS koostatud Tiigrihüppe võistlustele saadetud ülesandeid*

Kunst: Madli käis huvitavas kunstiloengus, kust sai teadmisi munatempera värvi valmistamiseks. Tuli kõigest pigment ja munakollane kokku segada. Ta soovis omal käel proovida kahe värvi, oranži ja sinise, segamist. Oranži valmistamiseks oli vaja 150 g vähem pigmenti kui sinise jaoks, kuid sinine värv omakorda vajas 180 g rohkem munakollaseid. Leia, kui mitu grammi oli Triinul mõlemat pigmenti vaja, kui oranži värvi sai ta 190 g, sinist kaks ja pool korda rohkem ning oranžile värvile kulus 6 munakollast (eeldusel, et üks munakollane kaalub 20 g)?

Ajalugu: Inglismaal valitsesid 14. sajandi lõpust 17. sajandini alguseni kolm dünastiat: Lancaster'i, York'i ja Tudor'i dünastiad. Kokku oli võim nende kolme dünastia käes 204 aastat. Lancasterid ja Yorkid valitsesid Britannias 32 aastat vähem kui Tudorid ning Yorkid kokku ja Tudorid valitsesid 80 aastat rohkem kui Lancasterid. Kui kaua oli võim Lancasteri'i, kui kaua York'i ja kui kaua Tudor'i dünastia käes?

Ühiskonnaõpetus ja bioloogia: Euroopa Liidu 27 liikmesriiki tekitasid aastatel 2005 – 2007 kokku 1562 kg olmejäätmeid elaniku kohta. Suur osa jäätmevoost tuli kodumajapidamistest. Kui 2005. aastal tekitatud olmejäätmete hulk oleks olnud kolm korda suurem, oleks kolmel aastal kokku tekitatud 2596 kg olmejäätmeid elaniku kohta. Kui 2007. aastal oleks tekitatud 5% vähem ning 2006. aastal 16% rohkem olmejäätmeid elaniku kohta, oleks kolmel aastal kokku tekitatud 1619, 58 kg olmejäätmeid elaniku kohta. Kui palju olmejäätmeid elaniku kohta tekitasid Euroopa Liidu 27 liikmesriiki aastal 2005, 2006 ja 2007?

Geograafia: 2004. aastal oli Hiiu maakonnas vähelagunenud turvast 141 tuhat tonni vähem kui Pärnu ja Rapla maakonnas kokku. Pärnu maakonnas on turvast 103,6 tuhat tonni vähem kui Rapla ja Hiiu maakonnas kokku. Kui palju on vähelagunenud turvast igas mainitud maakonnas, kui kokku on turvast 145 tuhat tonni?

Kehaline kasvatus: Kooli lõpuklassis toimus suusapäev. Suusatati künklikul maastikul. Leia klassi parima suusataja kiirus tasasel maal, kui mäkke tõustes oli tema kiirus 7 km/h väiksem ja laskumisel 18 km/h suurem kui tasasel maal. Distantsi pikkus oli 12 km ja selle läbimiseks kulus poolteist tundi.

Kindlasti on ülesannete koostamine tulnud kasuks ettevõtlikkus- ja õpipädevuste (probleemi püstitamine ja lahendamine, mudeli koostamine) kujunemisele.

Vahel võiks õpilastele kontrolltöö sooritamise asemel pakkuda võimalust ise kontrolltöö koostada ja koostatud ülesanded lahendada. Kasutama peaks konkreetset alusmaterjali. See pakub suurepärase võimaluse lõiminguks erinevate õppeainete ja ainevaldkondadega ning üldpädevuste ja läbivate teemadega.

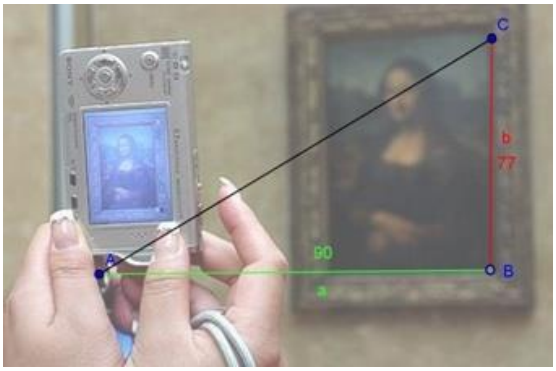
Trigonomeetria

Trigonomeetria lihtsustusülesannete lahendamine arendab ettevõtlikkus- ja õpipädevusi: tuleb mõelda mitu sammu ette ja kasutada samaaegselt nii algebra- kui ka trigonomeetriateadmisi.

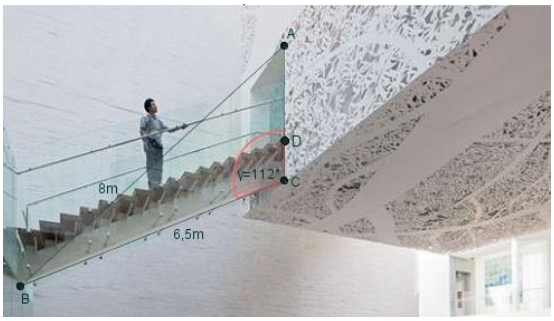
Kolmnurkade ja teiste tasandiliste kujundite pindalade arvutamise juures tuleks kindlasti kasutada võimalust lõiminguteks, praktilisteks töödeks, projekti- ja rühmatöödeks. Tekstülesannete lahendamisel tuleks pöörata tähelepanu sellele, et päikesekiire langemisnurka käsitletakse füüsikas ja ülejäänud loodusainetes erinevalt. Geograafias mõeldakse selle all maapinna ja päikesekiire vahelist nurka, füüsikas aga viimase täiendusnurka.

Näide 5. *Õpilaste koostatud ülesandeid kolmnurkade lahendamise kohta*

Ajalugu: Berliini müür ehitati 1961. aastal, eraldamaks Lääne-Berliini Saksa DV-st. Müür oli ligikaudu 140 km pikk ja see jagas Berliini kaheks. Üks suurimaid Berliini turismiatraktsioone, Brandenburgi väravad, jäid Lääne-Berliini. 1989. aastal, mõned kuud enne müüri langemist, tahtis üks Ida-Berliini põhikoolilõpetaja teada, kui kõrged on Brandenburgi väravad. Ta teadis, et müür on 70 meetri kaugusel ning värava kõrgus horisondist oli 20 kraadi ja 23 minutit. Millised arvutused pidi õpilane tegema?

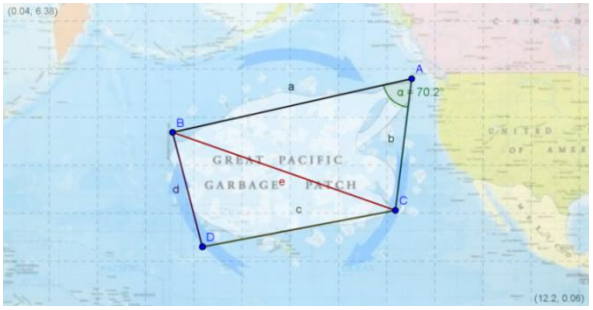


Kunst: Maailmakuulsas Louvre'i muuseumis asub Leonardo da Vinci maal „Mona Lisa", mille kõrgus on 77 cm. Tüdruk, kes asub teosest 90 cm kaugusel, soovib seda pildistada. Pildi õigeks fokusseerimiseks peab see talle paistma 20° nurga all. Kui palju peab tüdruk taganema, et saada kvaliteetne foto ning millise nurga all paistis „Mona Lisa" talle esialgselt?



Kunst: Muusemis asuv trepp on 6,5 m pikk ja moodustab seinaga nurga 112°. On teada, et trepi all oleva betoonaluse alguspunktist ukse tipuni on 8 m. Muuseum asub Mehhikos, mis pole tuntud kui väga pikkade inimestega riik. Kui pikk inimene mahub

selle ukse alt pead löömata läbi, kui trepi betoonaluse paksus on 80 cm? Kui kiiresti peaks külastaja kõndima, et trepist ülesminekuks kuluks alla poole minuti?



Ühiskonnaõpetus, geograafia: Vaikses ookeanis hulbivad kaks hiiglaslikku prügisaart. Antud pildil on kujutatud läänepoolset jäätmesaart (inglise keeles *the Western Garbage Patch).* Saare laius otstes on ligikaudu 2250 ja 2150 kilomeetrit ning pikkus 750 ja 850 kilomeetrit (vt joonist). Saare keskmine sügavus on 10 m ning kirdepoolse nurga suurus on 70,2°. Leia, mitmest konteineritäiest prügist koosneb Vaikses ookeanis hulpiv prügisaar, kui keskmise jäätmekonteineri maht on 200 liitrit.

Näide 6. *Slaid praktilise töö esitlusest „Puu kõrguse kaudne mõõtmine“*

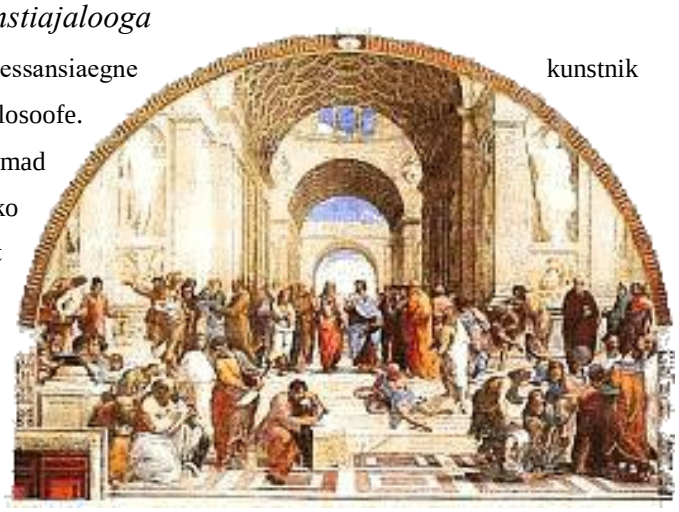
Käsitledes siinusfunktsiooni graafikut ja selle teisendusi, tuleks luua seoseid harmoonilise võnkumisega füüsikas. Kindlasti on siin abiks GeoGebra või mõne muu programmiga joonestatud graafikud, eriti hea on, kui jätkuks aega lasta neid graafikuid vähemalt laia matemaatikakursuse järgi õppivatel õpilastel endal joonestada.

Vektor tasandil. Joone võrrand

Vektorite teemat käsitlema asudes maksab õpilastele meelde tuletada selle sõna tähendust: vector – ladina keeles vedaja.

Vektorite skalaarkorrutise mõiste käsitlemine on mõistlik siduda mehhaanilise töö kui jõuvektori ja nihkevektori skalaarkorrutise leidmisega. Gümnaasiumi matemaatikaõpikutest võib leida mitmeid sellealaseid näiteid.

Näide 7. *Matemaatika lõiming ajaloo ja kunstiajalooga*



Juuresoleval pildil näeme, kuidas kujutas renessansiaegne kunstnik Raphael freskol "Ateena kool" Vana-Kreeka filosoofe. Kompositsiooni kesksed figuurid on kuulsaimad antiikajastu mõtlejad Platon ja Aristoteles. Fresko vasakpoolsel serval on näha istuvat, raamatut hoidvat Pythagorast, kes näitab sõrmega millelegi olulisele, vasakul on kujutatud Eukleidest tegelemas geomeetriaga. Alustades vektorite teemat ja käsitledes ristkoordinaate, võib õpilastelt küsida, milline sündmus leidis aset varem, kas vaadeldava fresko loomine või ristkoordinaadistiku kasutuselevõtt.

Tõenäosusteooria ja statistika

Kõnealune kursus kannab väga suurt õppija isiksuse arendamise koormust ja on eriti oma statistikaosaga üks olulisi vahendeid gümnaasiumi õppeprotsessi lõimimisel. Lõiming ühiskonnaõpetuse, loodusainete, kehakultuuri ja teiste õppeainetega saab toimuda uurimisülesannete valiku ning ühisprojektide kaudu. Tõenäosusteooria õppimise juures võiks rõhutada lõimingut läbivate teemade („Kultuuriline identiteet“, „Tehnoloogia ja innovatsioon“, „Teabekeskkond“ jt) ning üldpädevustega (väärtus-, suhtlus- ja ettevõtlikkuspädevus, esitamise ja kommunikatiivsed oskused jne). Hea võimaluse selleks annab tõenäosusteooria tekkimise ajalugu.

Statistikateemade seotust ümbritseva eluga aitab tagada mitmete aktuaalsete teabetekstide kasutamine. Valitud materjal peab kindlasti olema päevakohane ning õpilastele huvipakkuv. Väga huvitavaid andmeid leiab näiteks Päevalehe nädalalõpulisast leheküljelt „Graafiline maailm“. Õpilasi võiks suunata leitud infot interpreteerima.

Lisaks lõimimisvajadustele teiste õppeainetega võiks andmetöötluse juures enam rõhutada projekti- ja rühmatööde läbiviimist, mis lisaks mitmesuguste üld- ja ainealaste pädevuste arendamisele võimaldab õppetööd diferentseerida. Statistikateadmiste osakaal tähtsustub kindlasti, sest uurimistööde koostamise juures on selle vahendite tundmine hädavajalik. Tööd kergendavad koolidele kättesaadavad arvutiprogrammid ja internetileheküljed (programm „Tõenäosusteooria“, Allar Veelmaa internetilehekülg „Tõenäosusteooria ja statistika elemendid gümnaasiumis“ (2008) ning õpetajate koostatud tööjuhendid aadressil http://mott.edu.ee/mottwiki. Küsimustike koostamiseks võiks õpilasi suunata näiteks

eksamikeskuse kodulehel olevate rahuloluküsimustike juurde, kust saab inspiratsiooni küsimustike koostamiseks.

Funktsioonid. Arvjadad

Liitprotsendilise kasvamise ja kahanemise ning eksponent- ja logaritmfunktsiooni käsitlemise juures tuleks reaalse eluga seostamiseks lahendada sobivaid ülesandeid (nt majandus- ja rahandusülesanded, liikluskeskkonna ohutuse seos sõidukite liikumise kiirusega, muid riskitegureid hõlmavate andmetega graafikud, nt nakkushaiguste leviku eksponentsiaalne olemus jne). Heaks abivahendiks õpetajale ja õpilastele on koolidesse jõudnud Finantsaabits (Zirnask, 2011) ja internetilehekülg www.minuraha.ee. Lõiminguvõimalusi on nii läbivate teemade ("Keskkond ja jätkusuutlik areng", "Tehnoloogia ja innovatsioon", "Teabekeskkond", "Tervis ja ohutus", "Väärtused ja kõlblus" jne), mitmesuguste pädevuste (suhtluspädevus, väärtuspädevus, ettevõtlikkuspädevus jne) kui ka teiste õppeainetega.

Näide 8. *Eksponentsiaalne kasvamine ja kahanemine, lõiming loodusteadustega*

1) Naise rasestumisel tekib esialgu ainult üks rakk, millest hiljem areneb välja terve organism. See rakk pooldub 20 tundi pärast tekkimist ning tekkinud rakud poolduvad samuti 20 tunni pärast. Pärast 4. pooldumise tsüklit tekib kobarloode. Mitmest rakust koosneb kobarloode?

2) Tänaseks päevaks (aasta 2010) on WWF-i poolt läbi viidud uurimuse (2004) põhjal maailma metsikusse loodusesse alles jäänud 1600 hiidpandat, kusjuures selle aja jooksul (2004-2010) ei ole pandade arv maailmas muutunud. Aastal 1980 oli hiidpandade arv aga 1100. Kui mitme protsendi võrra on pandade arv maailmas selles ajavahemikus kasvanud? Kui see arvukuse tõus jätkub aastal 2010 sama protsendi juures, siis kui palju hiidpandasid on maailmas aastaks 2025?

Mainima peaks võimalust projekti- ja rühmatöödeks, samuti diferentseeritud õppe läbiviimiseks.

Näide 9. *Iseseisev töö* (Leego, Vedler, R., Vedler, S., 2002 põhjal)

1. Uuri ühe nädala jooksul suvalise börsiindeksi väärtusi.
2. Visanda graafik, võimalusel kasuta mingit arvutiprogrammi.
3. Määra kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumid.
4. Selgita ajakirjanduse põhjal välja, mis oli tõusu või languse põhjuseks.

5. Anna viited kasutatud materjalide kohta.

Funktsiooni piirväärtus ja tuletis. Tuletise rakendused

Kuigi kitsa matemaatika ainekava nimetab vaid funktsiooni tuletise geomeetrilist tähendust, on ainete lõimimise huvides mõistlik eraldi tähelepanu juhtida ka funktsiooni tuletise füüsikalisele tähendusele (hetkkiiruse näitel). Õpilaste üldist silmaringi laiendaks ka majandusalaste reaalse eluga seotud ülesannete lahendamine, optimaalsete lahenduste otsimine ekstreemumülesannete lahendamisel.

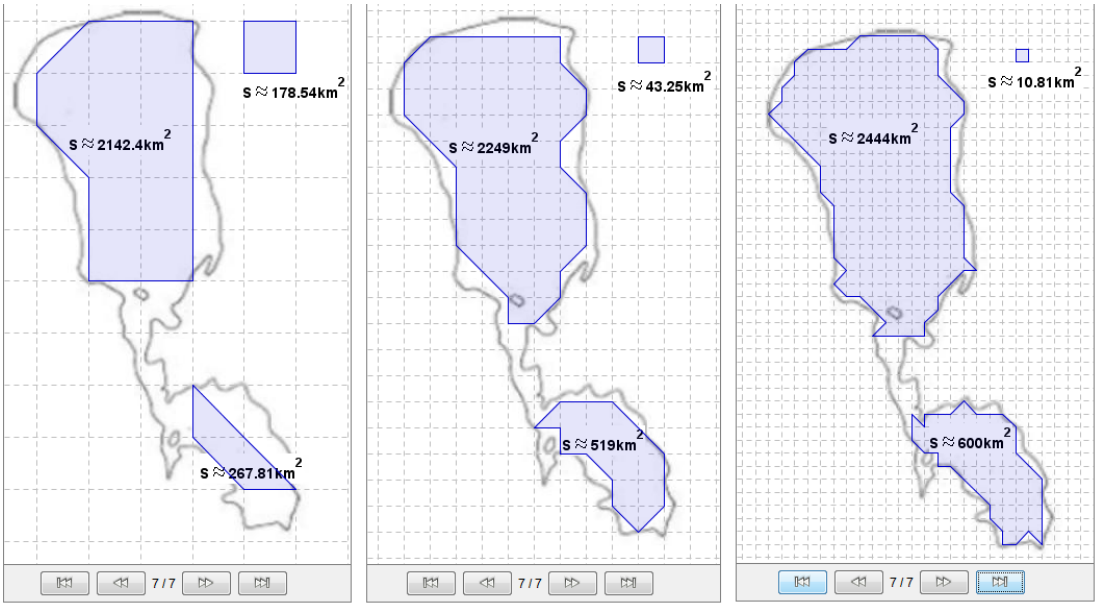
Näide 10. *Iseseisev töö* (Leego, Vedler, R., Vedler, S., 2002 põhjal)

1. Kauplustes võid leida erinevaid ühte liitrit mahutavaid pakendeid. Mõõda üheliitrise pakendi pindala arvutamiseks vajalikud suurused.
2. Arvuta, kui palju kulus materjali selle pakendi valmistamiseks, kui servade ühendamiseks kulus 5% materjalist.
3. Leia, millised oleks tulnud valida pakendi mõõtmed, et sama ruumala juures oleks materjalikulu kõige väiksem?
4. Kui mitu protsenti materjalist on sel viisil võimalik kokku hoida?

Tasandilised kujundid, stereomeetria

Nagu mitmete kursuste juures on lõiming siingi võimalik eelkõige eluliste näidete ning planimeetriaülesannete lahendamise kaudu.

Näide 11. *Peipsi järv, Jane Albre dünaamilised slaidid pindalade ligikaudse arvutamise kohta*



Hulktahukate käsitlemisel sobib keemiaga lõimuva rakendusliku näiteülesandena www.matdid.edu.ee leheküljel asuv Hilja Afanasjeva (2011) koostatud lahendusega ülesanne metaani molekulist.

Näide 12. *Metaani molekul ja tetraeeder, Hilja Afanasjeva koostatud õppematerjal*

Teatavasti koosneb metaani (CH_4) molekul neljast vesiniku aatomist, mis asetsevad korrapärase tetraeedri tippudes, ja ühest süsiniku aatomist, mis paikneb tetraeedri keskel tippudest võrdsetel kaugustel. Nimetame seda punkti tetraeedri keskpunktiks. Keemias õpitakse, et metaani sidemenurgad (keskpunkti tippudega ühendavate lõikude vahelised nurgad) on $109^{\circ}28'$. Püüame matemaatika abil selgeks teha, kuidas on see sidemenurk saadud. Teisisõnu: tuleb leida nurk, mille moodustavad tetraeedri tippudest süsiniku aatomini (tetraeedri keskpunkti) tõmmatud lõigud.

Kaare pikkuse ja kera käsitlemisel sobib geograafiaga lõimuva rakendusliku näiteülesandena http://matdid.edu.ee leheküljel asuv Hilja Afanasjeva (2011) koostatud õppematerjal kerast kui planeedi Maa mudelist.

Näide 13. *Kaare pikkuse arvutamine kera pinnal, näide Hilja Afanasjeva koostatud õppematerjalist „Planeedi Maa kaardistamine“*

Aafrikas paiknev Victoria juga asetseb samal pikkuskraadil kui Soome pealinn Helsingi: 25° idapikkust. Victoria joa lõunalaius on aga 18° ja Helsingi põhjalaius on 60°. Kui kaugel on linnulennult Victoria juga Helsingist?

Uue õppekava rakendamisel on õpetaja jaoks kindlasti tänuväärsed ka eespool toodud õppematerjalides väga korrektselt esitatud lahenduskäigud ja asjatundlikud metoodilised kommentaarid.

Lisaks korrektsele emakeele kasutamisele matemaatika õppimisel on võimalik – koostöös eesti keele õpetajaga – edukalt lõimida keeleõpet ja matemaatikat ka kirjandit või värsse kirjutades. Pannes paika kriteeriume, mille järgi töid hinnata, on hulgaliselt toetavat leida matemaatika uuest õppekavast (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2011). Nii on seal öeldud, et gümnaasiumi lõpetaja arutleb loovalt ja loogiliselt, mõistab ümbritsevas maailmas valitsevaid kvantitatiivseid, loogilisi, funktsionaalseid, statistilisi ja ruumilisi seoseid, et matemaatikapädevus hõlmab huvi matemaatika vastu, matemaatika sotsiaalse, kultuurilise ja personaalse tähenduse mõistmist jne.

Näide 14. *Noppeid õpilaste kirjanditest „Milleks mulle matemaatika“*

Karin: „Matemaatika avaldab positiivset mõju isiksuse kujunemisele, sest kasvatab iseloomu, mille tulemuseks ei olda allaandjad, vaid püüeldakse maksimumi poole. Lisaks sellele võidakse ühel hetkel avastada, et nauditakse väljakutseid, mida matemaatiliste probleemide lahendamine pakub.“

Martin: „Võib öelda, et matemaatika on omaette kunst – mõttekunst.“

Triinu: „Inimesed ütlevad tihti: “Õnne valem. Armastuse valem jne“. Sõna „valem“ on matemaatiline termin, kuid vähesed on selle peale mõelnud. Kui matemaatikas on palju valemeid, siis elus on neid veel rohkem. Matemaatikas tuleb lahendada erinevaid probleeme erinevate valemite abil, see kehtib ka päriselus. Inimesed, kes on harjunud matemaatikas kasutama erinevaid lahendusteid, oskavad neid rakendada ka oma elus. Mõnele inimesele kohe meeldivad raskemad lahendusviisid, teine aga oskab leida lihtsaima võimaluse. Matemaatika kasvatab vastupidavust ja usku, et ükskord jõutakse oma õnne valemini.“

Madli: „Ilmselt teeb mulle head, kui pean õppima midagi, mis mulle väga ei istu, sest elus on tihti vaja teha asju, mis ei meeldi, ning selleks on vaja õppida end sundima. Kirglikke armastajaid matemaatikast ja minust küll ei saa, ent halba ma temast ei räägi, sest tean, et ei tuleks temata toime.“

Karl: „Kuigi matemaatika liigitatakse reaalainete hulka, ei erine ta väga palju kunstist. Matemaatika meenutab enamusele eelkõige valemeid ja päheõppimist, kuid tegelikult on matemaatika samasugune looming kui ükskõik milline muu inimtegevus. Keith Devlin, kes on matemaatik ja matemaatika populariseerija Stanfordi Ülikoolis, väidab artiklis „Matemaatika kasu“, et matemaatika nõuab kujutlusvõimet, et see on uute, inimese loodud maailmade uurimine. Arvud on ju ka loonud inimene. Võrrandid, geomeetria, kõik see on inimvaimu looming.“

Killu: „Matemaatika on nagu sport. Selleks, et saada häid tulemusi, tuleb vaeva näha – teadupärast teeb just harjutamine meistriks. Nii matemaatikas kui spordis on kõik reeglipärane, nii nagu võib võrrandit mitut moodi lahendada, võib ka kõrgust hüpata „karjapoisi“ või „flopi“ tehnikat kasutades, peaasi, et ikka üle saad (ehk siis matemaatikakeeli: õige lahenduseni jõuad). See, kes otsib parimaid lahendusi elus, võib alustada õige lahenduse leidmisega matemaatikaülesandele.

Lõiming matemaatikas

Matemaatika õpetamisel gümnaasiumis tasub kindlasti rõhutada ainesisest vertikaalset lõimingut. Nii tuleks 10. klassis korrata algebralisi murde ning seostada seda põhikoolis õpitud harilike murdudega. Funktsiooni piirväärtuse arvutamisel on vaja kasutada mitmesuguseid põhikoolis õpitud avaldiste lihtsustamise võtteid (ühise teguri sulgude ette toomine, summa ja vahe ruutude ning kuupide abivalemid, ruutkolmliikme teisendamine korrutiseks, taandamine jne). Valides ülesandeid lahendamiseks, tuleks kindlasti silmas pidada seda, et planimeetria kursus on ettevalmistus stereomeetriaks. Kolmnurga ja teiste tasapinnaliste kujundite pindalade leidmisel, samuti stereomeetriaülesannete lahendamisel saab kasutada analüütilise geomeetria vahendeid (koordinaatide meetod, sirge ja teiste joonte võrrandid, nurk kahe tasandi vahel, nurk sirge ja tasandi vahel jne). Tuletise rakenduste, kujundite suurima ja vähima pindala ja ruumala leidmisel, toimub lõiming geomeetria, aga ka algebra ja trigonomeetria teemadega.

Järgnevas tooksin mõningaid näiteid vertikaalsest lõimingust matemaatika sees. Gümnaasiumi kitsas ja laias matemaatikakursuses tegeletakse tuletise ja integraali leidmisega algebralistest murdudest. Õpilaste tegutsemisraskused on seotud asjaoluga, et neil puudub vajalike vilumuste tasemele viidud oskus kirjutada ühe murruna antud algebraline murd mitme erineva liidetava summana. Seetõttu on vaja esitada õpilastele juba põhikoolis küllaldaselt ülesandeid, et kujundada järgnevateks õpinguteks vajalikke vilumusi (Afanasjev, 2010).

Näide 15. *Jüri Afanasjev algebralise murru käsitlemisel tehtavast eeltööst tuletise ja integraali leidmise jaoks*

Leida tuletis funktsioonist $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Enamasti püüavad õpilased siin kasutada valemit $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Arvutatakse $y' = \frac{\left(x^2-1\right)' \cdot x - \left(x^2-1\right) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - \left(x^2-1\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$.

Sama ülesande oleks võinud lahendada ka teisiti: $y = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - x^{-1}$ ning $y' = \left(x - x^{-1}\right)' = 1 - \left(-1\right) \cdot x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = \left[\frac{x^2+1}{x^2}\right]$.

Järgneva trigonomeetriaülesande lahendamisel peab õpilane tundma arvuhulki, eristama võrdust, samasust, võrrandit ja võrratust ning oskama teisendada ratsionaalavaldistega sarnaselt trigonomeetrilisi avaldisi (kasutama sulgude avamist, abivalemeid, algebraliste murdude liitmist lahutamist jne). Lisaks tuleb skitseerida funktsiooni graafik ja lugeda graafikult funktsiooni mitmeid omadusi ning lahendada graafiku abil trigonomeetrilisi põhivõrrandeid.

Näide 16. *Trigonomeetriaülesanne vertikaalse lõimingu näitena*

On antud funktsioon $f\left(x\right) = \sin^2 x\left(1 + \frac{1}{\sin x} + \cot x\right)\left(1 - \frac{1}{\sin x} + \cot x\right)$. Lihtsusta funktsiooni avaldis ja kujuta funktsioon graafiliselt. Leia saadud graafiku abil funktsiooni kasvamisvahemikud ja nullkohad.

Lihtsustame funktsiooni

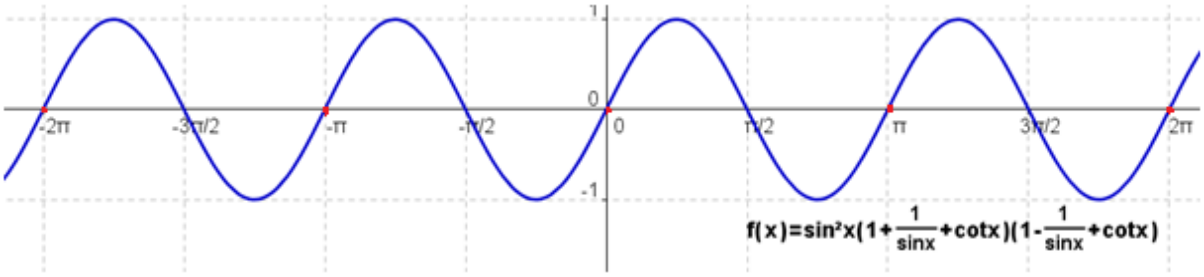
avaldise.

$$f(x)=\sin^2 x\left(1+\frac{1}{\sin x}+\cot x\right)\left(1-\frac{1}{\sin x}+\cot x\right)=\sin^2 x\left[(1+\cot x)^2-\frac{1}{\sin^2 x}\right]=$$

$$=\sin^2 x(1+\cot x)^2-1=\sin^2 x(1+2\cot x+\cot^2 x)-1=\sin^2 x+\frac{2\sin^2 x\cos x}{\sin x}+\frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}-1=$$

$$=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1=\sin 2x$$

Paneme tähele, et esialgse funktsiooni määramispiirkonna tõttu $x\neq n\pi$.

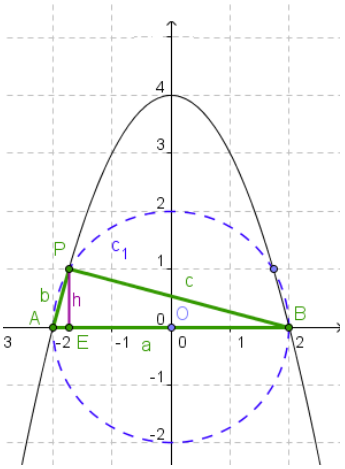


Funktsiooni $y=\sin 2x$ nullkohad on $X_0=\left\{...;-2\pi;-\frac{3\pi}{2};-\pi;-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};2\pi;...\right\}$.

Arvestades esialgse funktsiooni määramispiirkonda, on nullkohtadeks $X_0=\left\{x\middle|x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, kus

$n\in\mathbb{Z}$. Kasvamisvahemikud on $X\uparrow_1=\left]\left(4n-1\right)\frac{\pi}{4};n\pi\right[$ ja $X\uparrow_2=\left]n\pi;\left(4n+1\right)\frac{\pi}{4}\right[$.

Näide 17. *Ülesanne A. Linnu ja S. Soosalu kogumikust „Harjutusülesanded matemaatika riigieksamiks“* (2008)



Funktsiooni y = - x^2+4 graafiku ja x-telje poolt piiratud kujundisse on joonestatud täisnurkne kolmnurk nii, et selle hüpotenuus asub x-teljel, teravnurkade tipud parabooli ja x-telje lõikepunktides ning täisnurga tipp paraboolil. Leia selle kolmnurga pindala.

Kolmnurk APB on täisnurkne. Punkt P(x_1; y_1) asub paraboolil s.t. $y_1=-x_1^2+4$.

Kasutame Thalese teoreemi, diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk ja joonestame koordinaatide alguspunktist ringjoone raadiusega 2. Selle ringjoone võrrand on $x^2 + y^2 = 2^2$. Punkt P on ka ringjoone punkt. Saame süsteemi

$\begin{cases} y_1=-x_1^2+4 \\ x_1^2+y_1^2=4 \end{cases}$, millest asendusvõtet kasutades

$x_1^2 + \left(-x_1^2 + 4\right)^2 = 4$

$x_1^2 + 16 - 8x_1^2 + x_1^4 - 4 = 0$

$x_1^4 - 7x_1^2 + 12 = 0$.

Muutuja $x_1^2 = t$ vahetusega saame ruutvõrrandi $t^2 - 7x + 12 = 0$, mille lahendamiseks kasutame Viète'i teoreemi.

$t_1 = 3$ $\quad$ $t_2 = 4$

$x_1^2 = 3$ $\quad$ $x_2^2 = 4$

$x_1 = \pm\sqrt{3}$ $\quad$ $x_2 = \pm 2$

Kui $x_1 = \sqrt{3}$, siis $y_1 = -\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1$ ja punkt $P(\sqrt{3}; 1)$.

Kui $x_1 = -\sqrt{3}$, siis $y_1 = -\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1$ ja punkt $P(-\sqrt{3}; 1)$.

Punktist *P* *x*-teljele tõmmatud ristlõigu pikkus on 1 ja see on täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus. Hüpotenuusi pikkus on 4 ühikut, seega kolmnurga *APB* pindala on $S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2}$ pindalaühikut.

Seda ülesannet lahendades peab õpilane oskama lahendada võrrandisüsteeme ja biruutvõrrandit, arvutama kolmnurga pindala, teadma Thalese teoreemi ning ruutfunktsiooni omadusi ja graafikut. Seega lõimima nii algebra, funktsiooniteooria kui ka geomeetria teadmisi, nii põhikoolis õpitut kui ka gümnaasiumis omandatavat.

Kokkuvõte

Gümnaasiumi riiklik õppekava (2011) võimaldab lõimingu teostamist, kuid täiuslikkusest on asi kaugel. Kas tegelikult neid võimalusi kasutatakse, sõltub konkreetsete õpetajate teadlikkusest ja koostööst. Lõimimist ei tohi käsitleda kui õpetajate sundimise vahendit. Olulisem on aidata neil mõtestada seda, mida nad hetkel teevad, ja anda juhiseid, kuidas võiks asju teistmoodi teha.

Lõiming ei ole võluvits, mis lahendab kõik koolielu probleemid. Lõimimise rakendused ei vähenda kuidagi traditsiooniliste õppeainete sisu tähtsust, vaid väärtustavad teadmisi tervikuna.

Kirjandus

1. Põhikooli riiklik õppekava (2011). *Riigi Teataja I*, 14.01.2011, 1.
2. Gümnaasiumi riiklik õppekava (2011). *Riigi Teataja I*, 14.01.2011, 2.
3. Kuusk, T. (2008) *Õppekava integratsiooni võimalusi.* Külastatud 19. augustil 2011 aadressil http://www.ut.ee/curriculum/orb.aw/class=file/action=preview/id=549989/L%F5imingualane+juhendmaterjal_31_03_09.pdf .
4. Lepmann, T. (2010) *Lõiminguvõimalusi põhikooli matemaatikas.* Külastatud 19. augustil 2011 aadressil http://www.ut.ee/curriculum/orb.aw/class=file/action=preview/id=772212/l%F5imingukogumik_08+03+10.pdf .
5. Jaani, J., Aru, L. (2009, 15. mai). Lõiming riiklikus õppekavas – vähekasutatud võimalus *Õpetajate Leht*, lk 15.
6. Haavasalu, H. *Arvu π imeline elulugu.* Külastatud 20. augustil 2011 aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=201:arvu-pii-imeline-elulugu&catid=95:ringjoone-pikkus-ja-ringi-pindala&Itemid=121 .
7. Leego, T., Vedler, L., Vedler, S. (2002). *Matemaatika õpik kutseõppeasutustele.* Tartu, Atlex.
8. Veelmaa, A. (2008) *Tõenäosusteooria ja statistika elemendid gümnaasiumis*. Külastatud 20. augustil 2011 aadressil http://web.zone.ee/veelmaaallar/sisu1/index.html .
9. Zirnask, V. (2011) *Finantsaabits.* Külastatud 27. augustil 2011 aadressil http://www.minuraha.ee/finantsaabits .
10. Albre, J. *Pindalade ligikaudne arvutamine.* Külastatud 27. augustil 2011 aadressil http://elvag.edu.ee/~pihlap/D:/CD_Dynaamilised_slaidid/CD/Kovertrapets/Peipsi1.html .
11. Afanasjeva, H. (2011) *Metaani molekul ja tetraeeder*. Külastatud 27. augustil 2011 aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=203:metaani-molekul-ja-tetraeeder&catid=107:regulaarsed-hulktahukad&Itemid=136 .
12. Afanasjeva, H. (2011) *Planeedi Maa kaardistamine.* Külastatud 27. augustil 2011 aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=197:pikkus-ja-laiuskoordinadid-maal&catid=111:kera-ja-sfaeaer-nende-osad&Itemid=141 .

13. Afanasjev, J. (2010) *Algebralise murru käsitlemisel tehtavast eeltööst tuletise ja integraali leidmise jaoks.* Külastatud 27. augustil 2011 aadressil http://matdid.edu.ee/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=98:algebraline-murd-eeltoeoena-diferentseerimisele-ja-integreerimisele&catid=205:algebralised-murrud-ja-ratsionaalavaldised&Itemid=10 .
14. Lind, A., Soosalu, S. (2008). *Harjutusülesanded matemaatika riigieksamiks.* Tallinn, Ilo.